МЕТОД КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Курс лекций

Т. П. Шестакова[*]

Ростовский Государственный Университет
кафедра теоретической и вычислительной физики
344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, 5

[*]e-mail: shestakova@phys.rsu.ru

Содержание

Вводные замечания

Курс "Метод континуального интеграла в квантовой теории поля" на протяжении пяти лет читается в Ростовском Государственном Университете для студентов магистратуры, специализирующихся в области теоретической физики. Цель курса – познакомить студентов-теоретиков с методом континуального интеграла, который в настоящее время является одним из основных рабочих методов квантовой теории поля. В курсе используется материал, изложенный в оригинальных статьях и пока еще не вошедший в учебники и монографии.

Задачами изучения спецкурса являются:

- определить континуальный интеграл как математический объект, продемонстрировать эквивалентности фейнмановской формулировки квантовой механики формулировке Шредингера - Гейзенберга;
- показать основные математические приемы работы с континуальным интегралом, для чего подавляющее большинство математических выкладок даны с промежуточными вычислениями;
- продемонстрировать применение техники континуального интегрирования для получения функций Грина и элементов S-матрицы;
- изучить особенности квантования калибровочных полей методом континуального интегрирования;
- познакомить студентов с современным состоянием квантовой теории поля, что включает сопоставление различных подходов к квантованию калибровочных полей, доказательство их эквивалентности в тех случаях, когда такое доказательство может быть проведено, обсуждение нерешенных проблем построения квантовой теории калибровочных полей (в том числе на примере гравитации).

Предполагается, что студентами предварительно изучены курсы теоретической механики, квантовой механики, квантовой теории поля и общей теории относительности.

1. Фейнмановская формулировка квантовой теории

В 1948 в Rev. Mod. Phys. была опубликована статья Р. Фейнмана "Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механике", в которой излагалась, "по-существу, третья формулировка нерелятивистской квантовой теории", представляющая собой альтернативу волновой механике Шредингера и матричной механике Гейзенберга.

Фейнмановская формулировка основывается на двух постулатах, принятия которых оказывается достаточным, чтобы построить своеобразный математический аппарат и доказать эквивалентность предложенной формулировки квантовой механике Шредингера – Гейзенберга.

Центральным в фейнмановской версии квантовой теории является понятие амплитуды вероятности определенного пути в пространстве-времени (отсюда – пространственно-временной подход); именно использование этого понятия приводит к математической конструкции интеграла по траекториям (path integral; в литературе на русском языке встречаются различные названия этой конструкции – континуальный интеграл, функциональный интеграл и пр.).

1.1. Первый постулат Фейнмана: амплитуда вероятности пути

Для того, чтобы прийти к понятию интеграла по траекториям, Фейнман проводит следующее физическое рассуждение. Рассмотрим частицу, координата которой может принимать различные значения x. Пусть производится последовательность опытов

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_N, \tag{1.1}$$

в которых координата частицы

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N \tag{1.2}$$

измеряется в последовательные моменты времени

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_N; \tag{1.3}$$

для определенности будем считать (хотя это и не обязательно), что одно измерение следует за другим через равные интервалы времени ε, т. е.

$$t_{i+1} = t_i + \varepsilon. \tag{1.4}$$

Очевидно, что чем меньше ε, тем точнее известна траектория частицы $x(t)$.

Пусть в момент времени t_0 частица была обнаружена в точке с координатой x_0. Вероятность того, что в момент времени t_N частица будет обнаружена в точке с координатой x_N, обозначим как

$$P(x_0,\ x_N). \tag{1.5}$$

Если в момент времени t_1,

$$t_0 < t_1 < t_N, \tag{1.6}$$

производилось еще одно измерение координаты частицы, вероятность обнаружения значений $x_0,\ x_1,\ x_N$ в соответствующие моменты времени обозначим

$$P(x_0,\ x_1,\ x_N), \tag{1.7}$$

причем будет иметь место соотношение

$$P(x_0,\ x_N) = \sum_{x_1} P(x_0,\ x_1,\ x_N). \tag{1.8}$$

(Здесь ведется суммирование по всем возможным значениям координаты в момент времени t_1.)

Эта формула справедлива лишь только в том случае, если в момент времени t_1 действительно производится определенное измерение (т. е. координата частицы имеет в момент времени t_1 определенное значение). В случае, когда измерение не производится, неправомерно говорить, что координата частицы имеет какое-либо значение – ведь состояние с определенным значением координаты формируется именно в результате воздействия прибора на квантовый объект. В случае отсутствия измерения необходимо ввести амплитуды вероятности, которые связаны между собой формулой

$$\varphi(x_0,\ x_N) = \sum_{x_1} \varphi(x_0,\ x_1)\varphi(x_1,\ x_N), \tag{1.9}$$

Формула (1.8) для вероятности заменяется на

$$P(x_0,\ x_N) = \left|\varphi(x_0,\ x_N)\right|^2 = \left|\sum_{x_1} \varphi(x_0,\ x_1)\varphi(x_1,\ x_N)\right|^2. \tag{1.10}$$

Предполагая, что координата частицы пробегает непрерывный ряд значений, и обобщая формулу (1.8) на случай $(N-1)$ измерений, проведенных в интервале времени $(t_0,\ t_N)$, будем иметь:

$$P(x_0,\ x_N) = \iint \ldots \int P(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{N-1},\ x_N)\, dx_1 \ldots dx_{N-1}. \tag{1.11}$$

$P(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{N-1},\ x_N)$ – вероятность того, что путь частицы проходит через точки с координатами $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{N-1},\ x_N$; в пределе $\varepsilon \to 0$ эта величина дала бы вероятность классической траектории $x(t)$. Интегрирование в (1.11) производится по некоторой пространственно-временной области R, которой принадлежат точки с координатами $x_1, \ldots, x_{N-1}$. Можно сказать, что $P(x_0, x_N)$ в формуле (1.11) – это вероятность того, что путь частицы, обнаруженной в момент времени t_0 в точке x_0 и в момент времени t_N – в точке x_N, лежит в пространственно-временной области R.

Теперь допустим, что в области R не производится измерений, позволяющих детально проследить путь частицы; но выполняется измерение, позволяющее установить, что путь лежит где-то в области R (такое измерение Фейнман называет "идеальным измерением", имея в виду, что измерение не возмущает состояние частицы). Тогда нам необходимо обратиться к аналогу формулы (1.9), который примет вид:

$$\varphi(x_0, x_N) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint \ldots \int \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N)\, dx_1 \ldots dx_{N-1}. \tag{1.12}$$

Заметим, что в пределе $\varepsilon \to 0$ величина $\varphi(x_0, \ldots, x_N)$ зависит от всей траектории частицы $x(t)$, поэтому $\varphi(x_0, \ldots, x_N)$ называется функционалом амплитуды вероятности пути. Таким образом, в (1.12) мы интегрируем по всем возможным траекториям частицы в области R. Можно записать:

$$\varphi(x_0, x_N) = \int \varphi[x(t)] \prod_{t_0 < t < t_N} dx(t). \tag{1.13}$$

Величина $\varphi(x_0, x_N)$ называется амплитудой вероятности перехода частицы из точки с координатой x_0 в точку с координатой x_N. Формула (1.12) дает математическое выражение первого фейнмановского постулата, который утверждает, что при проведении "идеального измерения" вероятность обнаружения частицы в точке с координатой x_N определяется квадратом модуля некоторой величины, называемой амплитудой перехода, причем последняя представляет собой сумму комплексных слагаемых, каждое из которых соответствует определенной траектории частицы в области R.

1.2. Второй постулат Фейнмана: вычисление амплитуды вероятности пути

Второй постулат дает ответ на вопрос, как именно следует вычислять амплитуду вероятности для каждого конкретного пути:

Все траектории вносят вклад, одинаковый по абсолютной величине; фаза каждого вклада представляет собой выраженное в единицах постоянной Планка классическое действие.

$$\varphi[x(t)] \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\right). \tag{1.14}$$

При практическом вычислении интегралов по траекториям типа (1.13) работают с допредельными выражениями (1.12), задавая каждую "траекторию" последовательностью значений координат $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и вычисляя конечномерный интеграл, фигурирующий в (1.12). Тогда возникает проблема аппроксимации пути и, соответственно, действия на каждом из временных отрезков $[t_i,\ t_{i+1}]$. Предписание Фейнмана гласит, что на каждом из этих отрезков функция $x(t)$ совпадает с траекторией классической частицы, которая, выйдя в момент времени t_i из точки x_i, достигает к моменту t_{i+1} точки x_{i+1}. Поскольку классическая траектория обращает действие в минимум, то

$$S(x_i,\ x_{i+1}) = \min \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} L\left(\dot{x}(t),\ x(t)\right) dt; \tag{1.15}$$

$$S = \sum_i S(x_i,\ x_{i+1}). \tag{1.16}$$

Выбор способа аппроксимации действия в литературе на английском языке называется скелетонизацией (skeletonization).

Объединяя формулы (1.12), (1.14), (1.16), получаем:

$$\varphi(x_0,\ x_N) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint \ldots \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{i=0}^{N-1} S(x_i,\ x_{i+1})\right) dx_1 \ldots dx_{N-1}. \tag{1.17}$$

В работе 1948 г. Фейнман рассматривал лагранжианы, не содержащие высших производных по времени от обобщенных координат и квадратично зависящие от скоростей. При этом внезапные изменения скорости, происходящие в моменты времени t_i, не затрудняют вычисления конечномерных интегралов типа фигурирующего в (1.17). Вся квантовая механика, включая уравнение Шредингера, операторную алгебру, коммутационные соотношения, содержится в формуле (1.17), дополненной предписанием об аппроксимации действия, выраженным в формуле (1.15). Для лагранжианов с высшими производными, однако, необходимо искать обобщение способа аппроксимации.

1.3. Обсуждение амплитуды перехода

Рассмотрим некоторый момент времени $t = t_k$, принадлежащий отрезку $[t_0,\ t_N]$, которому соответствует координата частицы $x = x_k$. В (1.17) можно провести интегрирование по всем переменным x_i с $i > k$, а также с $i < k$. Тогда (1.17) запишется в виде

$$\varphi(x_0,\ x_N) = \int \chi^*(x,\ t)\psi(x,\ t)dx, \tag{1.18}$$

где

$$\chi^*(x,\ t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint \ldots \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{i=k}^{N-1} S(x_i,\ x_{i+1})\right) dx_{k+1} \ldots dx_{N-1}. \tag{1.19}$$

$$\psi(x,\ t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint \ldots \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{i=0}^{k-1} S(x_i,\ x_{i+1})\right) dx_1 \ldots dx_{k-1}; \tag{1.20}$$

Каков смысл функций $\psi(x,\ t)$ и $\chi^*(x,\ t)$? Очевидно, функция $\psi(x,\ t)$ никоим образом не зависит от того, что будет происходить с частицей в моменты времени, следующие за моментом t, но полностью определена прошлой историей частицы. Напротив, $\chi^*(x,\ t)$ характеризует те условия, в которых частица окажется в будущем. Мы получаем возможность говорить о взаимоотношении прошлого и будущего – в этом проявляется пространственно-временной подход.

Таким образом, квадрат амплитуды перехода (1.18) определяет вероятность того, что частица, находящаяся в состоянии, описываемом функцией ψ, будет обнаружена в состоянии, характеризуемом функцией χ:

$$|\,\varphi(x_0,\ x_N)\,|^{\,2} = \left|\int \chi^*(x,\ t)\psi(x,\ t)dx\right|^2. \qquad (1.21)$$

Функция $\psi(x,\ t)$, определяемая формулой (1.20), представляет собой волновую функцию частицы.

Из формулы (1.20) следует:

$$\psi(x_{k+1},\ t_{k+1}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x_k,\ x_{k+1})\right)\,\psi(x_k,\ t_k)dx_k, \qquad (1.22)$$

или, вводя обозначения

$$x_k = x,\ t_k = t,\ x_{k+1} = x',\ t_{k+1} = t' = t+\varepsilon, \qquad (1.23)$$

$$\psi(x',\ t') = \int \varphi(x,\ x')\psi(x,\ t)dx. \qquad (1.24)$$

Таким образом, амплитуда перехода $\varphi(x,\ x')$ связывает волновую функцию частицы в момент времени t с волновой функцией, рассматриваемой в некоторый последующий момент времени t'. Согласно развитой Дираком теории преобразований, волновая функция $\psi(x',\ t')$ описывает некоторое состояние, в представлении, в котором диагонален оператор $\hat{x}'$, соответствующий моменту времени t', в то время как функция $\psi(x,\ t)$ описывает то же состояние в представлении, в котором диагонален оператор $\hat{x}$. Обе функции связаны между собой преобразованием

$$\psi(x',\ t') = \int\ < x',\ t'\,|\,x,\ t >\ \psi(x,\ t)dx, \qquad (1.25)$$

причем элемент перехода между состояниями $< x',\ t'\,|\,x,\ t >$ может быть записан, используя оператор эволюции:

$$< x',\ t'\,|\,x,\ t > = < x'\,|\,\hat{U}(t',\ t)\,|\,x >; \qquad (1.26)$$

$$\hat{U}(t',\ t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right). \qquad (1.27)$$

Действительно, вектор состояния в представлении Шредингера можно разложить по собственным состояниям оператора координаты:

$$| \, \Psi^S(t') > = \int \psi(x', \, t') \, | \, x' > \, dx', \tag{1.28}$$

где

$$\psi(x', \, t') = < x' \, | \, \Psi^S(t') > \tag{1.29}$$

– шредингеровская волновая функция в координатном представлении. Связь между векторами состояния в представлениях Шредингера и Гейзенберга выражается формулой

$$| \, \Psi^S(t') > = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right) \, | \, \Psi^H > , \tag{1.30}$$

причем в момент времени t оба представления совпадают. Введем определение

$$| \, x', \, t' > \equiv \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right) \, | \, x' > ; \tag{1.31}$$

тогда

$$\psi(x', \, t') = < x' \, | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right) \, | \, \Psi^H > =$$

$$= < x', \, t' \, | \, \Psi^H > = \int \, < x', \, t' \, | \, x, \, t > < x, \, t \, | \, \Psi^H > \, dx \, = \int \, < x', \, t' \, | \, x, \, t > \, \psi(x, \, t) dx, \tag{1.32}$$

что совпадает с (1.25).

Вычислим матричный элемент оператора эволюции (1.25). Для этого рассмотрим произвольную функцию операторов импульса и координаты:

$$\hat{f} = f\left(\hat{p}, \, \hat{x}\right). \tag{1.33}$$

Проведем фурье-преобразование этой операторной функции, выбрав конкретный способ упорядочения операторов:

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\alpha, \, \beta) \exp\left(i\alpha\hat{p} + i\beta\hat{x}\right) d\alpha d\beta \tag{1.34}$$

здесь используется упорядочение по Вейлю; фурье-преобразование для обычных переменных имеет вид:

$$f(p, \, x) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\alpha, \, \beta) \exp\left(i\alpha p + i\beta x\right) d\alpha d\beta. \tag{1.35}$$

Матричный элемент оператора $\hat{f}$:

$$< x' \, | \, \hat{f} \, | \, x > = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\alpha, \, \beta) \, < x' \, | \exp\left(i\alpha\hat{p} + i\beta\hat{x}\right) \, | \, x > \, d\alpha d\beta. \tag{1.36}$$

Далее мы воспользуемся формулой Хаусдорфа

$$\exp\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=\exp\left(\hat{A}\right)\exp\left(\hat{B}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}[\hat{A},\ \hat{B}]\right), \tag{1.37}$$

а также коммутационными соотношениями

$$[\hat{p},\ \hat{x}]=-i\hbar. \tag{1.38}$$

Вставляя полные наборы, имеем:

$$< x'\,|\exp\left(i\alpha\hat{p}+i\beta\hat{x}\right)\,|\,x> = < x'\,|\exp\left(i\alpha\hat{p}\right)\exp\left(i\beta\hat{x}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\hbar\alpha\beta\right)\,|\,x>=$$

$$=\exp\left(-\frac{i}{2}\hbar\alpha\beta\right)\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} < x'\,|\,p'> < p'\,|\exp\left(i\alpha\hat{p}\right)\,|\,p> \times$$

$$\times < p\,|\,x'''> < x'''\,|\exp\left(i\beta\hat{x}\right)\,|\,x''> < x''\,|\,x> \ dp dp' dx'' dx'''. \tag{1.39}$$

Учитывая, что

$$< x\,|\,p> = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right), \tag{1.40}$$

получим:

$$< x'\,|\exp\left(i\alpha\hat{p}+i\beta\hat{x}\right)\,|\,x> = \frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left(-\frac{i}{2}\hbar\alpha\beta\right)\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i}{\hbar}p'x'\right)\exp\left(i\alpha p\right)\times$$

$$\times\delta(p-p')\exp\left(-\frac{i}{\hbar}px'''\right)\exp\left(i\beta x''\right)\delta(x''-x''')\,\delta(x-x'')dp dp' dx'' dx'''=$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left(-\frac{i}{2}\hbar\alpha\beta\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i}{\hbar}px'+i\alpha p-\frac{i}{\hbar}px+i\beta x\right)dp=$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left[i\beta\left(x-\frac{\alpha\hbar}{2}\right)\right]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{i}{\hbar}p\left(x'-x+\alpha\hbar\right)\right]dp=$$

$$=\exp\left[i\beta\left(x-\frac{\alpha\hbar}{2}\right)\right]\delta\left(x'-x+\alpha\hbar\right)=\exp\left[i\beta\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right]\delta\left(x'-x+\alpha\hbar\right); \tag{1.41}$$

$$< x'\,|\,\hat{f}\,|\,x> = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\alpha,\ \beta)\exp\left[i\beta\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right]\delta\left(x'-x+\alpha\hbar\right)d\alpha d\beta=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2\hbar}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\alpha,\ \beta)\exp\left[i\beta\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right]\exp\left(i\alpha p\right)\,\exp\left[\frac{i}{\hbar}p(x'-x)\right]d\alpha d\beta dp=$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(p,\ \frac{x+x'}{2}\right) \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(x'-x)\right] dp. \tag{1.42}$$

Беря в качестве $\hat{f}$ оператор $\hat{U}(t',\ t)$, имеем:

$$< x' \,|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right)\,| x > =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p(x'-x) - H\left(p,\ \frac{x+x'}{2}\right)(t'-t)\right)\right] dp. \tag{1.43}$$

В простейшем случае (для частицы во внешнем поле) гамильтониан

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{1.44}$$

Интеграл в (1.43) может быть приведен к виду

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\alpha z^2\right) dz, \tag{1.45}$$

который, в свою очередь, можно рассматривать как результат доопределения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\alpha z^2\right) dz = \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i(\alpha - i\eta) z^2\right) dz = \lim_{\eta\to 0} \sqrt{\frac{\pi}{\eta + i\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}}. \tag{1.46}$$

(Подобные интегралы в нашем курсе будут встречаться очень часто). Итак,

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m} - p\frac{x'-x}{t'-t} + V\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right)(t'-t)\right] dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left(\left[\frac{im}{2\hbar}\left(\frac{x'-x}{t'-t}\right)^2 - \frac{i}{\hbar} V\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right](t'-t)\right) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{2m\hbar}\left[p^2 - 2pm\frac{x'-x}{t'-t} + m^2\left(\frac{x'-x}{t'-t}\right)^2\right](t'-t)\right) dp =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t'-t)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x'-x}{t'-t}\right)^2 - V\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right](t'-t)\right). \tag{1.47}$$

Таким образом, используя дираковскую теорию преобразований, мы получаем, что амплитуда перехода

$$\varphi(x,\ x') = < x',\ t' \,|\, x,\ t > = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t'-t)}} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x'-x}{t'-t}\right)^2 - V\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right](t'-t)\right) \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x,\ x')\right) \tag{1.48}$$

(см. (1.24) – (1.27), (1.43), (1.44), (1.47)), что полностью согласуется со вторым фейнмановским постулатом (1.14). В (1.48) использовалась частная аппроксимация действия в лагранжевой форме. Итак, амплитуда перехода есть матричный элемент оператора эволюции (1.27).

Заметим также, что, в соответствие с (1.43),

$$\varphi(x,\ x') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p(x'-x) - H\left(p,\ \frac{x+x'}{2}\right)(t'-t)\right)\right] dp. \tag{1.49}$$

То, что стоит в показателе экспоненты в (1.49), можно рассматривать как аппроксимацию действия в гамильтоновой форме на временном отрезке $[t,\ t']$. Вообще, для произвольного интервала $[t_0,\ t_N]$ мы можем записать:

$$\varphi(x_0,\ x_N) = < x_N,\ t_N \,|\, x_0,\ t_0 > = < x_N \,|\, \hat{U}(t_N,\ t_0) \,|\, x_0 > =$$

$$= < x_N \,|\, \hat{U}(t_N,\ t_{N-1})\hat{U}(t_{N-1},\ t_{N-2}) \ldots \hat{U}(t_1,\ t_0) \,|\, x_0 > =$$

$$= \iint \ldots \int \ < x_N \,|\, \hat{U}(t_N,\ t_{N-1}) \,|\, x_{N-1} > \ < x_{N-1} \,|\, \hat{U}(t_{N-1},\ t_{N-2}) \,|\, x_{N-2} > \ \ldots \times$$

$$\times \ < x_1 \,|\, \hat{U}(t_1,\ t_0) \,|\, x_0 > \ dx_1 \ldots dx_{N-2} dx_{N-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^N \iint \ldots \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{i=0}^{N-1}\left[p_{i+1}\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i} - H\left(p_{i+1},\ \frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right](t_{i+1}-t_i)\right) \times$$

$$\times dp_1 \ldots dp_N dx_1 \ldots dx_{N-1}, \tag{1.50}$$

Переходя к пределу $\varepsilon \to 0$, получаем выражение для амплитуды перехода через континуальный интеграл в гамильтоновой форме:

$$\varphi(x_0,\ x_N) = \iint \ldots \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t_N}[p\dot{x} - H(p,\ x)]\,dt\right) \frac{dp(t_N)}{2\pi\hbar}\prod_{t_0<t<t_N}\frac{dx(t)dp(t)}{2\pi\hbar}. \tag{1.51}$$

1.4. Вывод уравнения Шредингера

Для того, чтобы продемонстрировать эквивалентность фейнмановской и обычной формулировок квантовой механики, необходимо доказать, что волновая функция (1.20) удовлетворяет уравнению Шредингера.

Мы будем исходить из соотношения (1.22) в обозначениях (1.23):

$$\psi(x',\ t') = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x,\ x')\right)\psi(x,\ t)dx. \tag{1.52}$$

Будем использовать следующую аппроксимацию действия на временном отрезке $[t,\ t']$:

$$S(x,\ x') = \frac{m}{2\varepsilon}z^2 - \varepsilon V(x'); \tag{1.53}$$

$$x' - x = z;\ t' - t = \varepsilon. \tag{1.54}$$

(Вопрос аппроксимации, однако, является достаточно тонким, и мы вернемся к нему в следующем разделе). Подставляя (1.53) в (1.52) и переходя к интегрированию по dz, получаем:

$$\psi(x',\ t+\varepsilon) = \frac{1}{N}\int \exp\left(\frac{im}{2\varepsilon\hbar}z^2\right)\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x')\right)\psi(x'-z,\ t)dz. \tag{1.55}$$

N – нормировочный множитель. Заметим, что равенство (1.55) справедливо лишь в пределе $\varepsilon \to 0$.

Будем предполагать, что функция $\psi(x,\ t)$ обладает такими свойствами, что интеграл по dz сходится. Поскольку ε – очень малая величина, функция $\exp\left(\dfrac{im}{2\varepsilon\hbar}z^2\right)$ быстро осциллирует при всех значениях z, исключая небольшую $\left(\text{порядка } \sqrt{\dfrac{\varepsilon\hbar}{m}}\right)$ область вблизи точки $z = 0$. С другой стороны, $\psi(x'-z,\ t)$ представляет собой сравнительно медленно меняющуюся функцию. Поэтому в области, где показательная функция быстро осциллирует, положительные и отрицательные значения подынтегрального выражения почти полностью взаимно уничтожаются, и вклад этой области в интеграл крайне мал. Таким образом, существенны лишь малые значения z, и функцию $\psi(x'-z,\ t)$ можно разложить в ряд Тейлора. Раскладывая в ряд также и левую часть в (1.55), имеем:

$$\psi(x',\ t) + \varepsilon\frac{\partial\psi(x',\ t)}{\partial t} + \ldots = \frac{1}{N}\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x')\right)\int \exp\left(\frac{im}{2\varepsilon\hbar}z^2\right)\Big(\psi(x',\ t) -$$

$$- z\frac{\partial\psi(x',\ t)}{\partial x'} + \frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2\psi(x',\ t)}{\partial x'^2} - \ldots\Big)\,dz. \tag{1.56}$$

В правой части (1.56) присутствуют интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{im}{2\varepsilon\hbar}z^2\right) dz = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}} \tag{1.57}$$

(см. (1.46));

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{im}{2\varepsilon\hbar}z^2\right) z dz = 0 \tag{1.58}$$

(интеграл от нечетной функции равен 0);

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{im}{2\varepsilon\hbar}z^2\right) z^2 dz = \frac{\hbar\varepsilon i}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}}. \tag{1.59}$$

Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\alpha z^2\right) z^2 dz = \frac{\partial}{\partial(i\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\alpha z^2\right) dz = -i\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{\frac{i\pi}{\alpha}} = \frac{i}{2\alpha}\sqrt{\frac{i\pi}{\alpha}}. \tag{1.60}$$

Подобным образом можно показать, что интеграл, содержащий четвертую степень z, пропорционален $\varepsilon^{\frac{5}{2}}$. Разлагая в ряд по ε также $\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x')\right)$, имеем:

$$\psi(x',\ t) + \varepsilon\frac{\partial\psi(x',\ t)}{\partial t} + \ldots =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}}\frac{1}{N}\left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x')\right)\left(\psi(x',\ t) + \frac{\hbar\varepsilon i}{2m}\frac{\partial^2\psi(x',\ t)}{\partial x'^2} - \ldots\right). \tag{1.61}$$

(Точками обозначены члены порядка ε^2 и выше). Для того, чтобы это равенство выполнялось в нулевом порядке по ε, необходимо положить:

$$N = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}}. \tag{1.62}$$

В первом порядке по ε после умножения на $\left(-\frac{\hbar}{i}\right)$ получаем уравнение Шредингера для частицы во внешнем поле:

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(x,\ t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,\ t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,\ t). \tag{1.63}$$

Уравнение (1.63), так же, как и формула (1.55), справедливо лишь в пределе $\varepsilon \to 0$.

Соответствующую процедуру можно провести и для функции $\chi^*(x,\ t)$, при этом для $\chi^*(x,\ t)$ получается уравнение типа (1.63), но с измененным знаком времени (комплексно-сопряженное).

1.5. Аппроксимации действия

При выводе уравнения Шредингера для частицы во внешнем поле мы, фактически, заменили скорости конечными разностями

$$\dot{x} \approx \frac{x' - x}{\varepsilon} = \frac{z}{\varepsilon}, \tag{1.64}$$

т. е. аппроксимировали траекторию частицы прямой линией. Несомненно, что при этом мы получили правильный результат. Вопрос в том, почему столь простой аппроксимации оказалось достаточно?

Как мы уже видели, основной вклад в интеграл (1.52) дает окрестность точки $z = 0$ порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Идея заключается в том, чтобы представить скорости, а, следовательно, и действие, в виде разложения по степеням z. Что же касается аппроксимации потенциальной части действия, она не играет важной роли в случае, когда потенциальная часть не содержит членов, линейных относительно скоростей. При этом выбор точки, в которой берется значение потенциала на временном интервале ε, не существенен: скажем, замена $V(x')$ на $V(x)$ приводит к изменению показателя степени в (1.55) на величину

$$-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\left(V(x) - V(x')\right) \approx \frac{i\varepsilon}{\hbar}\frac{\partial V}{\partial x}z. \tag{1.65}$$

Это величина порядка $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, и она приводит к появлению членов высшего порядка по ε в правой части (1.55) после разложения экспоненты. В случае заряженной частицы в электромагнитном поле, однако, действие содержит член

$$\int A\dot{x}dt. \tag{1.66}$$

Его аппроксимация типа

$$A(x')z \tag{1.67}$$

не является достаточно точной, так как на временном интервале ε выражение (1.67) изменяется на величину порядка ε:

$$\left(A(x) - A(x')\right)z \approx -\frac{\partial A}{\partial x}z^2, \tag{1.68}$$

что дает вклад в уравнение Шредингера.

Получим разложение скоростей по степеням z. Рассматривая x как функцию времени, при малых ε мы можем записать:

$$x(t) = x(t') - \varepsilon\dot{x}(t') + \frac{\varepsilon^2}{2}\ddot{x}(t') - \frac{\varepsilon^3}{3!}\dddot{x}(t') + \ldots \tag{1.69}$$

Отсюда

$$\dot{x}(t') = \frac{z}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\ddot{x}(t') - \frac{\varepsilon^2}{3!}\dddot{x}(t') + \ldots \tag{1.70}$$

Заметим, что производные высших порядков по времени могут быть выражены через производные первого порядка с помощью уравнений движения. Действительно, согласно предписанию Фейнмана, при аппроксимации на каждом временном интервале используется экстремальное значение действия, которое дает классическую траекторию на этом интервале. Поэтому при использовании классических уравнений движения этот принцип не будет нарушен.

В случае частицы во внешнем поле будем иметь:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial x}; \; \dddot{x} = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\dot{x}, \tag{1.71}$$

и т. д. Подставляя эти выражения в (1.70), получаем:

$$\dot{x}(t') = \frac{z}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2m}\frac{\partial V}{\partial x}(t') + \frac{\varepsilon^2}{3!m}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t')\dot{x}(t') + \ldots =$$

$$= \frac{z}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2m}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{3!m}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}z + \ldots \tag{1.72}$$

Беря большее число членов ряда, мы можем повышать точность аппроксимации. Теперь действие может быть представлено в виде ряда:

$$S(x,\ x') = \frac{m}{2\varepsilon}z^2 - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial V}{\partial x}z + \frac{\varepsilon}{6}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}z^2 - \varepsilon V(x') + \ldots \tag{1.73}$$

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x,\ x')\right) = \exp\left(\frac{im}{2\varepsilon\hbar}z^2\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial V}{\partial x}z + \frac{\varepsilon}{6}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}z^2 - \varepsilon V(x') + \ldots\right) \tag{1.74}$$

Разложение (1.74) мы должны умножить на разложение функции $\psi(x' - z,\ t)$ и проинтегрировать по z.

$$\int \exp\left(\frac{im}{2\varepsilon\hbar}z^2\right)\left(1 - \frac{i\varepsilon}{2\hbar}\frac{\partial V}{\partial x}z + \frac{i\varepsilon}{6\hbar}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}z^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x') + \ldots\right)\left(\psi(x',\ t) - z\frac{\partial\psi(x',\ t)}{\partial x'} + \frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2\psi(x',\ t)}{\partial x'^2} - \ldots\right)dz =$$

$$= \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x')\right)\int \exp\left(\frac{im}{2\varepsilon\hbar}z^2\right)(\psi(x',\ t) -$$

$$-z\frac{\partial\psi(x',\ t)}{\partial x'} - \frac{i\varepsilon}{2\hbar}\frac{\partial V}{\partial x}z\psi(x',\ t) + \frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2\psi(x',\ t)}{\partial x'^2} +$$

$$\left. + \frac{i\varepsilon}{2\hbar}\frac{\partial V}{\partial x}z^2\frac{\partial\psi(x',\ t)}{\partial x'} + \frac{i\varepsilon}{6\hbar}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}z^2\psi(x',\ t) + \ldots\right)dz. \tag{1.75}$$

Выполняя интегрирование (используя формулы (1.57) – (1.59)), мы видим, что последние два члена в (1.75) дают вклад порядка выше ε, т. е. в разложении $\dot{x}$ (1.72) действительно можно ограничиться лишь первым членом – конечной разностью (1.64).

Изложенный здесь метод представления действия на временном интервале ε необходимо использовать при выводе уравнения Шредингера в более сложных случаях, нежели рассмотренный выше пример частицы во внешнем поле. Обратимся к физической системе, обладающей конечным числом степеней свободы S, описываемой лагранжианом

$$L(x,\ \dot{x}) = \frac{1}{2} g_{IJ}(x) \dot{x}^I \dot{x}^J. \tag{1.76}$$

Здесь x, $\dot{x}$ обозначают всю совокупность координат и скоростей x^I, $\dot{x}^I$. Лагранжиан системы представляет собой квадратичную форму по скоростям, причем $g_{IJ}(x)$ играет роль метрики конфигурационного пространства. Действительно, метрикой в области пространства $\mathbb{R}^S$ называется квадратичная форма, заданная на касательных векторах в каждой точке и гладко зависящая от точки. (Метрика называется римановой, если квадратичная форма положительно определена, и псевдоримановой в противном случае). К лагранжиану (1.76) можно добавить также потенциальный член, однако с помощью выкладок, аналогичных проведенным выше, можно продемонстрировать, что добавление этого члена приводит лишь в к члену вида

$$V(x)\psi(x,\ t) \tag{1.77}$$

в уравнении Шредингера.

Уравнения движения для рассматриваемой системы – это уравнения геодезических в конфигурационном пространстве

$$\ddot{x}^I = -\Gamma^I_{JK} \dot{x}^J \dot{x}^K, \tag{1.78}$$

где Γ^I_{JK} – символы Кристоффеля, построенные по метрике g_{IJ}:

$$\Gamma^I_{JK} = \frac{1}{2} g^{IL} \left(\frac{\partial g_{JL}}{\partial x^K} + \frac{\partial g_{KL}}{\partial x^J} - \frac{\partial g_{JK}}{\partial x^L} \right). \tag{1.79}$$

Действительно, уравнения движения есть

$$\frac{d}{dt}\left(g_{IJ}\dot{x}^J\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{JK}}{\partial x^I}\dot{x}^J\dot{x}^K = 0; \tag{1.80}$$

или

$$g_{IJ}\dot{}\ddot{x}^J + \frac{\partial g_{IJ}}{\partial x^K}\dot{x}^J\dot{x}^K - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{JK}}{\partial x^I}\dot{x}^J\dot{x}^K = 0. \tag{1.81}$$

Симметризуя второй член в (1.81) по индексам J, K и умножая уравнение (1.81) на g^{IL}, получим

$$\ddot{x}^L = -\frac{1}{2} g^{IL} \left(\frac{\partial g_{IJ}}{\partial x^K} + \frac{\partial g_{IK}}{\partial x^J} - \frac{\partial g_{JK}}{\partial x^I} \right) \dot{x}^J \dot{x}^K = 0, \tag{1.82}$$

т. е. уравнение (1.78).

Заметим, что из уравнений движения следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} g_{IJ}\dot{x}^I\dot{x}^J\right) = 0. \tag{1.83}$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}g_{IJ}\dot{x}^I\dot{x}^J\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{IJ}}{\partial x^K}\dot{x}^I\dot{x}^J\dot{x}^K + g_{IJ}\dot{x}^I\ddot{x}^J =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{IJ}}{\partial x^K}\dot{x}^I\dot{x}^J\dot{x}^K - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{IJ}}{\partial x^K} + \frac{\partial g_{IK}}{\partial x^J} - \frac{\partial g_{JK}}{\partial x^I}\right)\dot{x}^I\dot{x}^J\dot{x}^K = 0. \tag{1.84}$$

Из (1.83) вытекает аппроксимация действия на временном интервале $[t,\ t']$:

$$S(x,\ x') = \frac{1}{2}\varepsilon g_{IJ}(x(t'))\dot{x}^I(t')\dot{x}^J(t') \tag{1.85}$$

(интеграл пропорционален промежутку времени ε).

Дифференцируя уравнения движения, получаем:

$$\dddot{x}^I = -\frac{\partial}{\partial x^L}\Gamma^I_{JK}\dot{x}^J\dot{x}^K\dot{x}^L - 2\Gamma^I_{JK}\ddot{x}^J\dot{x}^K = -\left(\frac{\partial}{\partial x^L}\Gamma^I_{JK} - 2\Gamma^I_{KM}\Gamma^M_{JL}\right)\dot{x}^J\dot{x}^K\dot{x}^L. \tag{1.86}$$

Теперь, используя (1.78), (1.86), мы можем обратиться к аналогу формулы (1.70):

$$\dot{x}^I(t') = \frac{z^I}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\ddot{x}^I(t') - \frac{\varepsilon^2}{3!}\dddot{x}^I(t') + \ldots = \frac{z^I}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}\Gamma^I_{JK}\dot{x}^J\dot{x}^K + \frac{\varepsilon^2}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x^L}\Gamma^I_{JK} - \right.$$

$$\left. -2\Gamma^I_{KM}\Gamma^M_{JL}\right)\dot{x}^J\dot{x}^K\dot{x}^L + \ldots = \frac{z^I}{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon}\Gamma^I_{JK}z^Jz^K + \frac{\varepsilon}{4}\Gamma^I_{JK}\Gamma^J_{LM}z^Kz^Lz^M +$$

$$+\frac{\varepsilon}{4}\Gamma^I_{JK}\Gamma^K_{LM}z^Jz^Lz^M + \frac{1}{6\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x^L}\Gamma^I_{JK} - 2\Gamma^I_{KM}\Gamma^M_{JL}\right)z^Jz^Kz^L + \ldots =$$

$$= \frac{z^I}{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon}\Gamma^I_{JK}z^Jz^K + \frac{1}{6\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x^L}\Gamma^I_{JK} + \Gamma^I_{KM}\Gamma^M_{JL}\right)z^Jz^Kz^L + \ldots \tag{1.87}$$

Символы Кристоффеля Γ^I_{JK} являются функциями от координат и берутся в точке $x'^I = x^I(t')$.

Далее необходимо представить экспоненту от действия в виде ряда по степеням z^J и проинтегрировать по переменным z^J (приведенные выше выкладки допускают естественное обобщение на случай конечного числа степеней свободы). В силу громоздкости выкладок мы не будем проводить их подробно. Остановимся лишь на вычислении гауссовых интегралов, которые будут встречаться нам в дальнейшем.

При выводе уравнения Шредингера для системы с конечным числом степеней свободы возникают интегралы вида

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int \exp\left(\frac{i}{2\varepsilon\hbar}g_{IJ}z^Iz^J\right)\prod_K dz^K. \tag{1.88}$$

$\hat{G} = \|g_{IJ}\|$ представляет собой симметричную матрицу, элементы которой не зависят от z^I. Из линейной алгебры известно, что в этом случае можно найти ортогональную матрицу $\hat{U}$ с определителем, равным 1, такую, что матрица

$$\hat{G}^d = \hat{U}^{-1}\hat{G}\hat{U} = \hat{U}^T\hat{G}\hat{U} \tag{1.89}$$

диагональна (для этого достаточно в качестве матрицы $\hat{U}$ взять матрицу, составленную из собственных векторов матрицы $\hat{G}$).

В интеграле (1.88) проводится замена переменных

$$y^I = (\hat{V}\hat{U}^T)^I_J z^J; \; z^I = (\hat{U}\hat{V}^{-1})^I_J y^J, \tag{1.90}$$

где $\hat{V}$ – диагональная матрица, такая, что

$$\hat{G}^d = \hat{V}^2. \tag{1.91}$$

Ясно, что якобиан преобразования

$$\det \left\| \frac{\partial y^I}{\partial z^J} \right\| = \det \hat{V} = \sqrt{\det \hat{G}} \equiv \sqrt{g}. \tag{1.92}$$

Указанным преобразованием квадратичная форма $g_{IJ}x^I x^J$ приводится к диагональному виду.

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp\left(\frac{i}{2\varepsilon\hbar} g_{IJ} z^I z^J\right) \prod_K dz^K = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp\left(\frac{i}{2\varepsilon\hbar} \sum_L (y^L)^2\right) \frac{1}{\sqrt{g}} \prod_K dy^K =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} (2i\pi\varepsilon\hbar)^{\frac{S}{2}}, \tag{1.93}$$

S – число степеней свободы, $I = 1, \dots, S$. Интеграл (1.93) представляет собой произведение гауссовых интегралов типа (1.46), (1.57).

Кроме того, нам понадобятся интегралы

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp\left(\frac{i}{2\varepsilon\hbar} g_{IJ} z^I z^J\right) z^{I_1} \dots z^{I_n} \prod_K dz^K \tag{1.94}$$

Они отличны от 0 лишь в том случае, если n – четное число;

$$n = 2m. \tag{1.95}$$

Например, в случае $n = 2$ интеграл (1.94) с помощью преобразования, позволяющего привести квадратичную форму в показателе экспоненты к диагональному виду, сводится к произведению гауссовых интегралов типа (1.57), (1.59), так что в результате получаем

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int \exp\left(\frac{i}{2\varepsilon\hbar} g_{IJ} z^I z^J\right) z^L z^M \prod_K dz^K = i\varepsilon\hbar (2i\pi\varepsilon\hbar)^{\frac{S}{2}} \frac{1}{\sqrt{g}} g^{LM}, \tag{1.96}$$

где через g^{LM} обозначены элементы матрицы, обратной матрице $\hat{G}$. В случае произвольного четного $n = 2m$ имеем:

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int \exp\left(\frac{i}{2\varepsilon\hbar}g_{IJ}z^I z^J\right) z^{I_1}\ldots z^{I_{2m}}\prod_K dz^K =$$

$$= (i\varepsilon\hbar)^m (2i\pi\varepsilon\hbar)^{\frac{S}{2}}\frac{1}{\sqrt{g}}\left(g^{I_1 I_2}\ldots g^{I_{2m-1}I_{2m}}+\right.$$

$$\left.+\text{члены со всевозможными перестановками } I_1,\ \ldots,\ I_{2m}\right) \tag{1.97}$$

(Общее число членов есть $(2m-1)(2m-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1$).

Из формул (1.96), (1.97) следует, что члены, содержащие произведение двух величин z^L дают вклад порядка ε, члены содержащие произведение четырех величин z^L – порядка ε^2, и т. д. (Величина $(2i\pi\varepsilon\hbar)^{\frac{S}{2}}$ возникает во всех интегралах и может быть включена в нормировочный множитель). Поэтому, подставляя разложение (1.87) в выражение (1.85) для аппроксимированного действия и представляя экспоненту от действия в виде ряда по степеням z^L, мы должны удерживать лишь следующие члены (промежуточные выкладки опускаются):

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x,\ x')\right) = \exp\left(\frac{i}{2\varepsilon\hbar}g_{IJ}\left[z^I z^J - \Gamma^I_{KL}z^J z^K z^L+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}\Gamma^I_{KL}\Gamma^J_{MN}z^K z^L z^M z^N + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^M}\Gamma^I_{KL}+\Gamma^I_{LN}\Gamma^N_{KM}\right)z^J z^K z^L z^M+\ldots\right]\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{i}{2\varepsilon\hbar}g_{IJ}z^I z^J\right)\left[1 - \frac{i}{2\varepsilon\hbar}g_{IJ}\Gamma^I_{KL}z^J z^K z^L + \frac{i}{8\varepsilon\hbar}g_{IJ}\Gamma^I_{KL}\Gamma^J_{MN}z^K z^L z^M z^N+\right.$$

$$+\frac{i}{6\varepsilon\hbar}g_{IJ}\left(\frac{\partial}{\partial x^M}\Gamma^I_{KL}+\Gamma^I_{LN}\Gamma^N_{KM}\right)z^J z^K z^L z^M-$$

$$\left.-\frac{1}{8(\varepsilon\hbar)^2}g_{IJ}g_{MN}\Gamma^I_{KL}\Gamma^M_{PQ}z^J z^K z^L z^N z^P z^Q+\ldots\right]. \tag{1.98}$$

1.6. Мера в континуальном интеграле

Из проведенных выкладок можно заключить, что предписание Фейнмана об аппроксимации действия классической траекторией на каждом из временных отрезков (формулы (1.15), (1.16)) полностью фиксирует вид уравнения Шредингера, т. е. порядок операторов в последнем. Действительно, казалось бы, что остается лишь перемножить разложение (1.98) и разложение волновой функции по степеням z^I

$$\psi(x'-z,\ t) = \psi(x',\ t) - z^I\frac{\partial\psi(x',\ t)}{\partial x'^I} + \frac{1}{2}z^I z^J\frac{\partial^2\psi(x',\ t)}{\partial x'^I\partial x'^J}+\ldots \tag{1.99}$$

и выполнить гауссовы квадратуры. На самом деле в континуальном интеграле для системы с лагранжианом (1.76) принципиально не определена мера!

В случае частицы во внешнем поле, для которого мы уже получили уравнение Шредингера, мера полагалась тривиальной. Это можно было сделать лишь потому, что вид уравнения Шредингера (1.63) для такой частицы согласуется с экспериментом.

Меру следует полагать тривиальной и при выводе уравнения Шредингера для нерелятивистской частицы в электромагнитном поле. В обоих случаях порядок операторов в уравнении Шредингера определяется аппроксимацией действия, причем недостаточно точная аппроксимация может привести к неправильному (т. е. несогласующемуся с экспериментом) упорядочению операторов в уравнении Шредингера (как уже говорилось, недостаточно точная аппроксимация может привести к потере членов, которые дают вклад порядка ε при выводе уравнения Шредингера). Отметим кстати, что в обоих случаях конфигурационное пространство является плоским.

Всегда ли можно использовать тривиальную меру? Оказывается, нет: в случае системы, описываемой лагранжианом (1.76) использование тривиальной меры привело бы к уравнению Шредингера с неэрмитовым (!) гамильтонианом.

Итак, встает вопрос о выборе меры μ в континуальном интеграле и о выборе аппроксимации этой меры на каждом временном отрезке $[t,\ t']$, т. е. функции

$$\mu(x,\ x'). \tag{1.100}$$

Тогда исходное соотношение для вывода уравнения Шредингера есть

$$\psi(x',\ t') = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x,\ x')\right) \psi(x,\ t)\, \mu(x,\ x') \prod_K \frac{dx^K}{N}. \tag{1.101}$$

Предположим, что на отрезке $[t,\ t']$ мера определяется своим значением в единственной точке

$$\mu(x,\ x') = \mu(x). \tag{1.102}$$

Мы можем разложить $\mu(x)$ подобно $\psi(x,\ t)$ в ряд по степеням конечных разностей:

$$\mu(x'-z) = \mu(x') - z^I \frac{\partial\mu(x')}{\partial x'^I} + \frac{1}{2} z^I z^J \frac{\partial^2\mu(x')}{\partial x'^I \partial x'^J} + \ldots \tag{1.103}$$

Подставляя разложения (1.98), (1.99), (1.103) в (1.101), в результате выполнения гауссовых квадратур получим уравнение Шредингера, оператор Гамильтона в котором содержит производные от неизвестной пока еще функции $\mu(x)$. Накладывая на этот оператор условие эрмитовости

$$\iint \ldots \int \psi_1^*(x) \hat{H} \psi_2(x) \mu(x) \prod_K dx^K = \iint \ldots \int \left(\hat{H}\psi_1^*(x)\right) \psi_2(x) \mu(x) \prod_K dx^K, \tag{1.104}$$

получим дифференциальное уравнение для $\mu(x)$, которое позволяет определить меру с точностью до постоянного множителя:

$$\mu(x) = C\sqrt{g(x)}. \tag{1.105}$$

Используя явный вид меры (1.105), получаем уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^J}\left(\sqrt{g}g^{IJ}\frac{\partial\psi}{\partial x^I}\right) + \frac{\hbar^2}{6}R\psi. \tag{1.106}$$

Здесь R – скалярная кривизна, построенная по метрике конфигурационного пространства.

Прокомментируем приведенные здесь результаты. Во-первых, мера (1.105) инвариантна относительно преобразований обобщенных координат в конфигурационном пространстве. Соответственно, и уравнение Шредингера (1.106) инвариантно относительно преобразований обобщенных координат. Отметим, что в квантовой теории проблема выбора параметризации переменных является актуальной в силу операторного характера уравнений теории: далеко не всегда можно указать уравнение, инвариантное относительно выбора параметризации (выбора переменных в конфигурационном пространстве). В данном случае метод континуального интегрирования в силу относительной простоты системы приводит к инвариантному уравнению. Нетрудно указать пример, когда инвариантное уравнение получить невозможно – это случай системы со связями (калибровочной инвариантностью). Метрика конфигурационного пространства, включающего калибровочные степени свободы, оказывается вырожденной (об этом будет подробнее говориться в дальнейшем), и построить по такой метрике ковариантный лапласиан невозможно; теория оказывается неинвариантной относительно выбора калибровочных переменных.

Во-вторых, отличительной чертой использования метода континуального интегрирования для вывода уравнения Шредингера является присутствие в последнем члена, пропорционального скалярной кривизне конфигурационного пространства R. Заметим, что, поскольку R умножается на $\hbar^2$, уравнение дает правильный классический предел. Однако возникает подозрение, что уравнение Шредингера в виде (1.106) не может быть получено методом канонического квантования (оно выводится из гамильтоновых операторных уравнений движения установленной процедурой; см. Дополнение); методом же канонического квантования, при выборе определенного способа упорядочения операторов, обеспечивающего инвариантность относительно преобразований координат в конфигурационном пространстве, получается уравнение

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^J}\left(\sqrt{g}g^{IJ}\frac{\partial\psi}{\partial x^I}\right). \tag{1.107}$$

Такое предположение неверно! Оно основывается на замене импульсов дифференциальными операторами

$$\hat{p}_I \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^I}. \tag{1.108}$$

Однако в пространстве с нетривиальной мерой оператор (1.108) не является самосопряженным, т. е. не выполняется условие

$$\iint\ldots\int\psi_1^*(x)\hat{p}_I\psi_2(x)\mu(x)\prod_K dx^K = \iint\ldots\int\left(\hat{p}_I\psi_1^*(x)\right)\psi_2(x)\mu(x)\prod_K dx^K, \tag{1.109}$$

В то же время даже в плоском пространстве коммутационные соотношения

$$[\hat{p},\ \hat{x}] = -i\hbar \tag{1.110}$$

позволяют определить вид оператора импульса с точностью до произвольной функции координат:

$$\hat{p}_I \to -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x^I} + \xi_I(x)\right). \tag{1.111}$$

И если в плоском пространстве мы вправе положить функции $\xi_I(x)$ равными нулю, в пространстве с кривизной мы должны определить эти функции из соотношений (1.109).

$$\begin{aligned}\iint\ldots\int \psi_1^*(x)\left(-i\hbar\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x^I} + \xi_I(x)\psi_2(x)\right]\right)\mu(x)\prod_K dx^K = \\ = \iint\ldots\int i\hbar\left[\frac{\partial\psi_1^*}{\partial x^I} + \xi_I(x)\psi_1^*(x)\right]\psi_2(x)\mu(x)\prod_K dx^K + \\ + \iint\ldots\int i\hbar\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^I} - 2\xi_I(x)\mu(x)\right)\psi_1^*(x)\psi_2(x)\prod_K dx^K.\end{aligned} \tag{1.112}$$

Чтобы выполнялось условие эрмитовости, необходимо, чтобы второй интеграл в (1.112) обращался в 0, т. е.

$$\xi_I(x) = \frac{1}{2\mu(x)}\frac{\partial\mu}{\partial x^I}. \tag{1.113}$$

В частности, при $\mu(x) = \sqrt{g(x)}$,

$$\xi_I(x) = \frac{1}{4g(x)}\frac{\partial g}{\partial x^I}. \tag{1.114}$$

В случае рассматриваемой нами системы с лагранжианом (1.76) гамильтониан, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$H(x,\ p) = \frac{1}{2}g^{IJ}(x)p_Ip_J. \tag{1.115}$$

Выбирая один из возможных способов упорядочения операторов в гамильтониане, при котором последний остается эрмитовым,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}g^{IJ}(x)p_Ip_J \to \frac{1}{2\sqrt{g}}\hat{p}_I\sqrt{g}g^{IJ}\hat{p}_J = \\ = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial}{\partial x^I} + \frac{1}{4g}\frac{\partial g}{\partial x^I}\right)\sqrt{g}g^{IJ}\left(\frac{\partial}{\partial x^J} + \frac{1}{4g}\frac{\partial g}{\partial x^J}\right)\end{aligned} \tag{1.116}$$

мы видим, что при действии оператора (1.116) на волновую функцию появится ряд членов, не содержащих производных волновой функции по координатам, т. е. своего рода "эффективный потенциал", пропорциональный $\hbar^2$, чье присутствие не оказывает влияния на существование классического предела.

Ясно, что способ упорядочения операторов в гамильтониане (1.116) не единственно возможный; можно рассмотреть и более сложные. Во многих случаях, особенно если известен явный вид квадратичной формы (1.115), можно найти такой способ упорядочения операторов, что уравнение Шредингера, полученное в рамках канонического формализма с использованием данного способа упорядочения, совпадает с уравнением, полученным методом континуального интеграла.

Конечно, в квантовой механике и обычной квантовой теории поля проблема упорядочения не возникает: каков способ упорядочения операторов в уравнении Шредингера или же в уравнениях для полевых операторов, выясняется с помощью эксперимента. Однако эта проблема актуальна в тех областях квантовой теории поля, где экспериментальная проверка (во всяком случае, пока) невозможна, например, в гравитации. В квантовой геометродинамике основным объектом является так называемая волновая функция Вселенной, о чем мы будем говорить позднее, которая удовлетворяет некоему уравнению. Для простых космологических моделей геометродинамику можно свести к теории системы с конечным числом степеней свободы, подобной системе с лагранжианом (1.76), но с тем важным отличием, что система является системой со связями. Именно в таких случаях и проявляется проблема упорядочения, а метод континуального интегрирования обладает неоспоримыми преимуществами при исследовании вопроса математической корректности вывода уравнения для волновой функции, описывающей такую систему.

Можно сформулировать и другую задачу: пусть задан некоторый способ упорядочения операторов в уравнении Шредингера. Какой должна быть выбрана мера в континуальном интеграле и ее аппроксимация на отрезке $[t,\ t']$, чтобы полученное уравнение Шредингера соответствовало заданному способу упорядочения? Очевидно, в этом случае придется прибегнуть к более изощренной аппроксимации меры, чем использованная выше, когда мера определялась своим значением в единственной точке временного интервала (см. (1.102)). Требование инвариантности уравнения Шредингера относительно преобразований обобщенных координат в конфигурационном пространстве обычно приводит к классу уравнений

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^J}\left(\sqrt{g}g^{IJ}\frac{\partial\psi}{\partial x^I}\right) + \alpha\hbar^2 R\psi, \tag{1.117}$$

где α – параметр, зависящий от выбор аппроксимации меры.

1.7. Операторные уравнения и коммутационные соотношения

Теперь мы покажем, что, используя континуальный интеграл как исходный объект квантовой теории, можно вывести известные нам уравнения для квантовомеханических операторов, а также коммутационные соотношения. Мы обратимся (для простоты) снова к одномерному случаю частицы во внешнем поле и рассмотрим следующий интеграл:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint \ldots \int x_k \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{i=0}^{N-1} S(x_i,\ x_{i+1})\right) dx_1 \ldots dx_{N-1} \tag{1.118}$$

Здесь x_k – координата частицы в момент времени t_k, $t_0 < t_k < t_N$. В этом интеграле можно провести интегрирование (подобно тому, как мы это делали раньше) по всем переменным x_i с $i > k$, а также с $i < k$. Тогда интеграл (1.118) запишется в виде

$$\int \chi^*(x,\ t) x \psi(x,\ t) dx, \tag{1.119}$$

где мы положили $x = x_k$, $t = t_k$, а $\chi^*(x,\ t)$, $\psi(x,\ t)$ определяются формулами (1.19), (1.20). Согласно обычной квантовой механике, (1.119) представляет собой матричный элемент оператора координаты между состояниями $|\,\mathrm{X}(t) >$, $|\,\Psi(t) >$, описываемыми волновыми функциями $\chi^*(x,\ t)$, $\psi(x,\ t)$:

$$< \mathrm{X}(t)\,|\,\hat{x}\,|\,\Psi(t) > = \int x(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(\tau)]\right) \prod_{t_0 < \tau < t_N} dx(\tau). \tag{1.120}$$

Это определение матричного элемента обобщается на случай произвольной физической величины, которая, вообще говоря, может быть функционалом траектории $x(t)$:

$$< \mathrm{X}(t)\,|\,\hat{F}\,|\,\Psi(t) > = \int F[x(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(\tau)]\right) \prod_{t_0 < \tau < t_N} dx(\tau) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint \ldots \int F(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_N) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{i=0}^{N-1} S(x_i,\ x_{i+1})\right) dx_1 \ldots dx_{N-1}. \tag{1.121}$$

Покажем, например, что, положив

$$F(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_N) = \frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon}, \tag{1.122}$$

мы получим матричный элемент оператора скорости. Действительно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\iint \ldots \int x_{k+1} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{i=0}^{N-1} S(x_i,\ x_{i+1})\right) dx_1 \ldots dx_{N-1} - \right.$$

$$\left. - \iint \ldots \int x_k \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{i=0}^{N-1} S(x_i,\ x_{i+1})\right) dx_1 \ldots dx_{N-1}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\int \chi^*(x_{k+1},\ t_{k+1}) x_{k+1} \psi(x_{k+1},\ t_{k+1}) dx_{k+1} - \int \chi^*(x_k,\ t_k) x_k \psi(x_k,\ t_k) dx_k\right). \tag{1.123}$$

Учитывая, что

$$\psi(x_{k+1},\ t_{k+1}) = < x_{k+1}\,|\,\Psi(t_{k+1}) > = < x_{k+1}\,|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t_{k+1}-t_k)\hat{H}\right)\,|\,\Psi(t_k) > =$$

$$= < x_{k+1}\,|\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\hat{H}\right)\,|\,\Psi(t_k) > \qquad (1.124)$$

(и то же для $\chi(x_{k+1},\ t_{k+1})$), перепишем (1.123) в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int < \mathrm{X}(t_k)\,|\exp\left(\frac{i\varepsilon}{\hbar}\hat{H}\right)\,|\,x_{k+1} > \ x_{k+1}\times\right.$$

$$\left.\times\ < x_{k+1}\,|\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\hat{H}\right)\,|\,\Psi(t_k) > \ dx_{k+1} - \ < \mathrm{X}(t_k)\,|\,\hat{x}\,|\,\Psi(t_k) > =\right.$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int < \mathrm{X}(t_k)\,|\left(1+\frac{i\varepsilon}{\hbar}\hat{H}\right)\hat{x}\,|\,x_{k+1} > \ \times\right.$$

$$\left.\times\ < x_{k+1}\,|\left(1-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\hat{H}\right)\,|\,\Psi(t_k) > \ dx_{k+1} - \ < \mathrm{X}(t_k)\,|\,\hat{x}\,|\,\Psi(t_k) > =\right.$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(< \mathrm{X}(t)\,|\left(1+\frac{i\varepsilon}{\hbar}\hat{H}\right)\hat{x}\left(1-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\hat{H}\right)\,|\,\Psi(t) > \ - \ < \mathrm{X}(t)\,|\,\hat{x}\,|\,\Psi(t) > =\right.$$

$$= < \mathrm{X}(t)\,|\,\frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}\hat{x}-\hat{x}\hat{H}\right)\,|\,\Psi(t) > = < \mathrm{X}(t)\,|\,\hat{\dot{x}}\,|\,\Psi(t) >, \qquad (1.125)$$

что и ожидалось.

Операторным уравнениям обычной квантовой механики в фейнмановской формулировке соответствует утверждение, что некоторые функционалы могут иметь одинаковые элементы перехода между любыми двумя состояниями. Получим теперь важное соотношение, полезное при выводе операторных уравнений и коммутационных соотношений.

Рассмотрим матричный элемент

$$< \mathrm{X}(t)\,|\,\frac{\partial\hat{F}}{\partial x}\,|\,\Psi(t) > = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint\dots\int\frac{\partial F}{\partial x_k}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)dx_1\dots dx_{N-1}. \qquad (1.126)$$

В формуле (1.126) проинтегрируем по частям, предполагая, что волновые функции на бесконечности обращаются в 0, обеспечивая тем самым исчезновение внеинтегрального члена.

$$< \mathrm{X}(t)\,|\,\frac{\partial\hat{F}}{\partial x}\,|\,\Psi(t) > = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint\dots\int F\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)dx_1\dots dx_{N-1} =$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\ < \mathrm{X}(t)\,|\,\hat{F}\frac{\partial S}{\partial x}\,|\,\Psi(t) > \ . \qquad (1.127)$$

Функционалы $\dfrac{\partial\hat{F}}{\partial x}$ и $\left(-\dfrac{i}{\hbar}\hat{F}\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)$ будем называть эквивалентными. Имея в виду, что от координаты x_k, соответствующей некоторому моменту времени t_k, зависит только аппроксимированное действие на отрезках $[t_{k-1},\ t_k]$, $[t_k,\ t_{k+1}]$, запишем:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} \longleftrightarrow -\frac{i}{\hbar}F\left(\frac{\partial S(x_{k-1},\ x_k)}{\partial x_k}+\frac{\partial S(x_k,\ x_{k+1})}{\partial x_k}\right). \tag{1.128}$$

При выводе соотношения (1.127), (1.128) предполагалось, что мера в континуальном интеграле тривиальна. В случае нетривиальной меры, очевидно, мы должны записать:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} \longleftrightarrow -\frac{i}{\hbar}F\left(\frac{\partial S(x_{k-1},\ x_k)}{\partial x_k}+\frac{\partial S(x_k,\ x_{k+1})}{\partial x_k}\right) - F\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_k}. \tag{1.129}$$

В случае частицы во внешнем поле аппроксимированное действие есть

$$S(x_k,\ x_{k+1}) = \frac{m\varepsilon}{2}\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{\varepsilon}\right)^2 - \varepsilon V(x_{k+1}), \tag{1.130}$$

так что

$$\frac{\partial S(x_k,\ x_{k+1})}{\partial x_k} = -m\frac{x_{k+1}-x_k}{\varepsilon}; \tag{1.131}$$

$$\frac{\partial S(x_{k-1},\ x_k)}{\partial x_k} = m\frac{x_k-x_{k-1}}{\varepsilon} - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x_k}. \tag{1.132}$$

Пусть функционал F не зависит от x_k, тогда, подставляя (1.131), (1.132) и $F = \mathrm{const}$ в формулу (1.128), получим:

$$0 \longleftrightarrow m\left(\frac{x_k-x_{k-1}}{\varepsilon} - \frac{x_{k+1}-x_k}{\varepsilon}\right) - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x_k} \tag{1.133}$$

или

$$m\frac{x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}}{\varepsilon^2} \longleftrightarrow -\frac{\partial V}{\partial x_k}. \tag{1.134}$$

В левой части соотношения (1.134) стоит произведение массы на аппроксимированное по трем точкам ускорение a, в правой части – градиент потенциала. Соотношение (1.134) означает, что матричные элементы соответствующих операторов между любыми двумя состояниями равны, иначе говоря, справедливо уравнение для операторов

$$m\hat{a} = -\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}, \tag{1.135}$$

которое есть ни что иное, как уравнение Ньютона в операторной форме.

Пусть теперь

$$F = x_k. \tag{1.136}$$

Соотношение (1.128) принимает вид

$$1 \longleftrightarrow -\frac{i}{\hbar}x_k\left[m\left(\frac{x_k-x_{k-1}}{\varepsilon} - \frac{x_{k+1}-x_k}{\varepsilon}\right) - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x_k}\right], \tag{1.137}$$

или, пренебрегая членами порядка ε,

$$m\frac{x_{k+1}-x_k}{\varepsilon}x_k - mx_k\frac{x_k-x_{k-1}}{\varepsilon} \longleftrightarrow -i\hbar. \tag{1.138}$$

Величины в левой части (1.138) соответствуют операторам координаты и скорости. Однако возникает вопрос, какой порядок операторов предполагает соотношение (1.138)? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим функционал

$$F = f(x_k)g(x_{k+1}), \tag{1.139}$$

где $f(x)$, $g(x)$ – произвольные функции, и выпишем соответствующий матричный элемент:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\ldots\int f(x_k)g(x_{k+1})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{i=0}^{N-1}S(x_i,\ x_{i+1})\right)dx_1\ldots dx_{N-1} =$$
$$= \iint \chi^*(x_{k+1},\ t_{k+1})g(x_{k+1})\varphi(x_k,\ x_{k+1})\,f(x_k)\psi(x_k,\ t_k)dx_k dx_{k+1}. \tag{1.140}$$

(Мы провели интегрирование по всем dx_i с $i<k$ и $i>k+1$). Далее будем использовать обозначения (1.23). Учитывая, что

$$\varphi(x,\ x') = <x'\,|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right)|\,x>, \tag{1.141}$$

матричный элемент (1.140) перепишем следующим образом:

$$\iint\ <\mathrm{X}(t')\,|\,x'>\ g(x')\ <x'\,|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right)|\,x>\ f(x)\ <x\,|\,\Psi(t)>\ dxdx' =$$
$$= \iint\ <\mathrm{X}(t)\,|\exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right)\hat{g}(x')\,|\,x'><x'\,|\,\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right)\hat{f}(x)\,|\,x><x\,|\,\Psi(t)>\ dxdx' =$$
$$= <\mathrm{X}(t)\,|\exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right)\hat{g}(x')\,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right)\hat{f}(x)\,|\,\Psi(t)>=$$
$$= <\mathrm{X}(t)\,|\,\hat{g}(x)\hat{f}(x)\,|\,\Psi(t)>\ . \tag{1.142}$$

Здесь мы учли, что

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right)\hat{g}(x')\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)\right) = \hat{g}(x). \tag{1.143}$$

Из проведенных выкладок следует, что порядок следования сомножителей в произведении операторов определяется порядком следования во времени соответствующих членов в функционале: операторы, соответствующие функциям от координаты в более поздний момент времени, x_{k+1}, появляются левее тех, которые отвечают функциям от x_k.

Выше мы видели, что функционал

$$F = \frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon} \tag{1.144}$$

соответствует скорости частицы в момент времени t, тогда функционал

$$F = \frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon} \tag{1.145}$$

соответствует скорости частицы в предшествующий момент времени; поэтому соотношение (1.138) подразумевает выполнение операторного уравнения

$$m\hat{\dot{x}}\hat{x} - \hat{x}m\hat{\dot{x}} = -i\hbar, \tag{1.146}$$

или

$$\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p} = -i\hbar. \tag{1.147}$$

Итак, мы получаем коммутационные соотношения для операторов импульса и координаты.

Таким образом, два постулата Фейнмана, которые вводят понятие амплитуды перехода и дают ее выражение через континуальный интеграл, потенциально содержат в себе:

1) возможность определения через континуальный интеграл волновой функции;

2) математически последовательную процедуру вывода уравнения Шредингера для волновой функции;

3) возможность вывода уравнений движения в операторной форме;

4) коммутационные соотношения.

В то же время при аксиоматическом построении квантовой механики в ее обычной формулировке нам необходимо введение шести независимых постулатов, а именно:

1) постулат о векторе состояния;

2) постулат о том, что каждой наблюдаемой величине ставится в соответствие некоторый оператор (в фейнмановской формулировке квантовой механике каждой наблюдаемой величине ставится в соответствие некоторый функционал);

3) постулат о собственных функциях и собственных значениях физической величины F:

$$\hat{F}\psi_n = F_n\psi_n; \tag{1.148}$$

4) принцип суперпозиции (учтен в фейнмановских постулатах – в математическом определении амплитуды перехода через континуальный интеграл);

5) принцип соответствия – существование уравнений движения в операторной форме (как мы видели, может рассматриваться как следствие фейнмановских постулатов);

6) принцип неопределенности – существование коммутационных соотношений (следствие фейнмановских постулатов).

1.8. Разложение амплитуды перехода в ряд теории возмущений

Имея в виду в дальнейшем построение S-матрицы, дадим разложение амплитуды перехода в ряд теории возмущений. Будем исходить из следующего выражения для амплитуды перехода

$$\varphi(x_0,\ x_N) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon i}\right)^{\frac{N}{2}} \iint\ldots\int \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{m}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right)^2 - V(x_{i+1})\right]\times$$
$$\times dx_1\ldots dx_{N-1}. \tag{1.149}$$

Предполагая, что потенциал $V(x)$ достаточно мал (в теории поля это предположение обычно обеспечивается малостью константы связи), представим амплитуду перехода в виде:

$$\varphi(x_0,\ x_N) = \varphi_0(x_0,\ x_N) + \varphi_1(x_0,\ x_N) + \varphi_2(x_0,\ x_N) + \ldots \tag{1.150}$$

где

$$\varphi_0(x_0,\ x_N) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon i}\right)^{\frac{N}{2}} \iint\ldots\int \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\sum_{i=0}^{N-1}(x_{i+1}-x_i)^2\right]\times$$
$$\times dx_1\ldots dx_{N-1}; \tag{1.151}$$

$$\varphi_1(x_0,\ x_N) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon i}\right)^{\frac{N}{2}}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{N-1}\iint\ldots\int \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}(x_{j+1}-x_j)^2\right]\varepsilon V(x_{i+1})\,dx_1\ldots dx_{N-1}; \tag{1.152}$$

$$\varphi_2(x_0,\ x_N) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\hbar^2}\right)\left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon i}\right)^{\frac{N}{2}}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}\iint\ldots\int \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\sum_{j=0}^{N-1}(x_{j+1}-x_j)^2\right]\times$$
$$\times\varepsilon^2 V(x_{i+1})V(x_{l+1})dx_1\ldots dx_{N-1}; \tag{1.153}$$

Интегралы типа (1.151) достаточно часто встречаются при работе с континуальными интегралами. Покажем, что

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\ldots\int \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\sum_{i=0}^{N-1}(x_{i+1}-x_i)^2\right]dx_1\ldots dx_{N-1} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right)^{\frac{N-1}{2}}\exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar N}(x_N-x_0)^2\right]. \tag{1.154}$$

Доказательство проводится по индукции. Предположим, что равенство (1.154) справедливо при $(N-2)$, и докажем, что оно выполняется также при $(N-1)$:

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int \exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\sum_{i=0}^{N-1}(x_{i+1}-x_i)^2\right]dx_1\ldots dx_{N-1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{N-1}}\left(\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right)^{\frac{N-2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar(N-1)}(x_{N-1}-x_0)^2\right]\exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}(x_N-x_{N-1})^2\right]dx_{N-1}. \tag{1.155}$$

Делаем замену:

$$y=x_{N-1}-x_0; \tag{1.156}$$

в показателе экспоненты под интегралом имеем:

$$\frac{1}{N-1}y^2+(x_N-x_0-y)^2=\frac{N}{N-1}y^2-2y(x_N-x_0)+(x_N-x_0)^2=$$

$$=\frac{N}{N-1}\left(y-\frac{N-1}{N}(x_N-x_0)\right)^2+\frac{1}{N}(x_N-x_0)^2. \tag{1.157}$$

Проведем еще одну замену:

$$z=y-\frac{N-1}{N}(x_N-x_0). \tag{1.158}$$

Интеграл (1.155) примет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{N-1}}\left(\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right)^{\frac{N-2}{2}}\exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar N}(x_N-x_0)^2\right]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{imN}{2\varepsilon\hbar(N-1)}z^2\right]dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{2\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right)^{\frac{N-1}{2}}\exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar N}(x_N-x_0)^2\right], \tag{1.159}$$

что совпадает с (1.154). Остается лишь доказать, что формула справедлива при $N=1$. Имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\left((x_1-x_0)^2+(x_2-x_1)^2\right)\right]dx_1=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\left(2x_1^2-2x_1(x_0+x_2)+x_0^2+x_2^2\right)\right]dx_1=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{im}{\varepsilon\hbar}\left[\left(x_1-\frac{x_0+x_2}{2}\right)^2-\left(\frac{x_0+x_2}{2}\right)^2+\right.\right.$$

$$+\frac{x_0^2+x_2^2}{2}\Big]\Big)dx_1 = \left(\frac{\pi\hbar\varepsilon i}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{im}{4\varepsilon\hbar}(x_2-x_0)^2\right]. \tag{1.160}$$

Равенство (1.154) полностью доказано.

$$\varphi_0(x_0,\ x_N) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon i}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar N}(x_N-x_0)^2\right] =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi\hbar i(t_N-t_0)}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\frac{(x_N-x_0)}{t_N-t_0}\right]. \tag{1.161}$$

В силу требования причинности амплитуда $\varphi_0(x_0,\ x_N)$ должна обращаться в 0 при $t_N < t_0$, так что

$$\varphi_0(x_0,\ x_N) = A\theta(t_N-t_0)\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\frac{(x_N-x_0)}{t_N-t_0}\right], \tag{1.162}$$

A – нормировочный множитель.

Обратимся теперь к формуле (1.152). Сумму в показателе экспоненты в (1.152) разобьем на две: от $j=0$ до $j=i$, и от $l=i+1$ до $l=N-1$. Выделяя также интеграл по dx_{i+1}, перепишем формулу следующим образом:

$$\varphi_1(x_0,\ x_N) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\sum_{i=0}^{N-1}\int dx_{i+1}\left(\left[\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon i}\right]^{\frac{i+1}{2}}\times\right.$$

$$\times\iint\ldots\int\exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\sum_{j=0}^{i}(x_{j+1}-x_j)^2\right]dx_1\ldots dx_i\Bigg)\ \varepsilon V(x_{i+1})\left(\left[\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon i}\right]^{\frac{N-i-1}{2}}\times\right.$$

$$\times\iint\ldots\int\exp\left[\frac{im}{2\varepsilon\hbar}\sum_{l=i+1}^{N-1}(x_{l+1}-x_l)^2\right]dx_{i+2}\ldots dx_{N-1}\Bigg) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\sum_{i=0}^{N-1}\int dx_{i+1}\varphi_0(x_0,\ x_{i+1})\varepsilon V(x_{i+1})\,\varphi_0(x_{i+1},\ x_N) =$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{\infty}^{\infty}dx\varphi_0(x_0,\ x)V(x)\varphi_0(x,\ x_N). \tag{1.163}$$

Формула (1.163) дает поправку первого порядка к свободному пропагатору. Аналогичными выкладками можно показать, что поправка второго порядка есть

$$\varphi_2(x_0,\ x_N) = -\frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dx'\varphi_0(x_0,\ x)\,V(x)\varphi_0(x,\ x')V(x')\varphi_0(x',\ x_N). \tag{1.164}$$

Заметим в заключение, что свободный пропагатор $\varphi_0(x, x')$ представляет собой функцию Грина уравнения Шредингера для свободной частицы. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}G_0(x,\ x') - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}G_0(x,\ x') = i\hbar\delta(x,\ x')\delta(t,\ t') \tag{1.165}$$

В таком случае общее решение уравнения Шредингера для частицы во внешнем поле

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,\ t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{1.166}$$

записывается следующим образом:

$$\psi(x',\ t') = \psi_0(x',\ t')\ - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int dx G_0(x,\ x')V(x)\psi(x,\ t), \tag{1.167}$$

где $\psi_0(x',\ t')$ – общее решение уравнения Шредингера для свободной частицы,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{1.168}$$

В сказанном нетрудно убедиться, действуя оператором $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$ на функцию (1.167).

Теперь выразим волновую функцию частицы в момент времени t' через волновую функцию в более ранний момент времени t, и воспользуемся разложением амплитуды перехода в ряд теории возмущений:

$$\psi(x',\ t') = \int \varphi(x,\ x')\psi(x,\ t)dx\ = \int \varphi_0(x,\ x')\psi(x,\ t)dx -$$

$$-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'' \iint dxdx''\varphi_0(x'',\ x')V(x'')\,\varphi_0(x,\ x'')\psi(x,\ t) + \ldots \tag{1.169}$$

Пусть в момент времени t волновая функция частицы $\psi(x,t)$ представляет собой плоскую волну. Тогда и функция

$$\psi_0(x',\ t') = \int \varphi_0(x,\ x')\psi(x,\ t)dx \tag{1.170}$$

также будет представлять собой плоскую волну – решение свободного уравнения Шредингера (1.168). Суммируя остальные члены ряда в (1.169), мы получим интегральное уравнение для $\psi(x,\ t)$

$$\psi(x',\ t') = \psi_0(x',\ t')\ - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'' \iint dxdx''\varphi_0(x'',\ x')V(x'')\times$$

$$\times\varphi(x,\ x'')\psi(x,\ t) \tag{1.171}$$

или

$$\psi(x',\ t') = \psi_0(x',\ t')\ - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'' \int dx''\varphi_0(x'',\ x')V(x'')\psi(x'',\ t''), \tag{1.172}$$

которое совпадает с (1.167), причем

$$\varphi_0(x,\ x') = G_0(x,\ x'). \tag{1.173}$$

1.9. Идея построения матрицы рассеяния

Матрица рассеяния S определяется как амплитуда перехода из состояния $|\,\psi_{in}>$, в котором частица находилась в момент времени $t = -\infty$, в состояние $|\,\psi_{out}>$, в котором частица будет находится в момент времени $t = +\infty$.

Предположим, что внешнее поле включается в момент времени t_0 и выключается в момент времени t_N. Пусть волновая функция состояния $|\,\psi_{in}>$ представляет собой плоскую волну. Частица свободно движется. Введем волновую функцию частицы в момент времени t_0:

$$\psi_{in}(x_0,\ t_0) = < x_0\,|\,\psi^S_{in}(t_0) > = < x_0\,|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t_0\right)\,|\,\psi^I_{in}(t_0) > \ . \tag{1.174}$$

$\hat{H}_0$ – гамильтониан свободной частицы; $|\,\psi^I_{in}(t_0) >$ – вектор состояния частицы в момент времени t_0 в представлении взаимодействия; $|\,\psi^S_{in}(t_0) >$ – вектор состояния частицы в момент времени t_0 в представлении Шредингера, он является результатом развития во времени состояния $|\,\psi_{in}>$. Заметим, что в момент времени t_0 волновая функция частицы – все еще плоская волна.

Как следует из фейнмановской формулировки, в момент времени t_N, когда взаимодействие выключается, состояние частицы будет описываться волновой функцией

$$\psi^{(+)}(x_N,\ t_N) = \int \varphi(x_0,\ x_N)\psi_{in}(x_0,\ t_0)dx_0. \tag{1.175}$$

Амплитуда вероятности обнаружить частицу в момент времени t_N в определенном состоянии $|\,\psi^S_{out}(t_N) >$ дается интегралом

$$\int \psi^*_{out}(x_N,\ t_N)\psi^{(+)}(x_N,\ t_N)dx_N. \tag{1.176}$$

где

$$\psi^*_{out}(x_N,\ t_N) = < \psi^I_{out}(t_N)\,|\exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t_N\right)\,|\,x_N > \ . \tag{1.177}$$

Тогда

$$\int \psi^*_{out}(x_N,\ t_N)\psi^{(+)}(x_N,\ t_N)dx_N\ = \iint \psi^*_{out}(x_N,\ t_N)\varphi(x_0,\ x_N)\psi_{in}(x_0,\ t_0)dx_N dx_0 =$$

$$= \iint \, < \psi^I_{out}(t_N) \,|\exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t_N\right)\,| x_N > \; < x_N \,|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_N - t_0)\right)\,| x_0 > \; \times$$

$$\times \; < x_0 \,|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t_0\right)\,| \psi^I_{in}(t_0) > \; dx_N dx_0 =$$

$$= < \psi^I_{out}(t_N) \,|\exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t_N\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_N - t_0)\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t_0\right)\,| \psi^I_{in}(t_0) > = < \psi^I_{out}(t_N) \,|\, \hat{S}(t_0,\, t_N) \,|\, \psi^I_{in}(t_0) > \; . \qquad (1.178)$$

В пределе $t_0 \to -\infty$, $t_N \to +\infty$ мы получаем выражение для S-матрицы:

$$< \psi^I_{out} \,|\, \hat{S}(-\infty,\, +\infty) \,|\, \psi^I_{in} > = < \psi^I_{out} \,| \lim_{\substack{t_0 \to -\infty \\ t_N \to +\infty}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t_N\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_N - t_0)\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t_0\right)\,| \psi^I_{in} > =$$

$$= \iint \psi^*_{out}(x(+\infty))\varphi(x(-\infty),\, x(+\infty))\psi_{in}(x(-\infty))dx^{(+)}dx^{(-)}. \qquad (1.179)$$

Отсюда следует, что амплитуда перехода $\varphi(x(-\infty),\ x(+\infty)\ )$ представляет собой ядро $\hat{S}$-оператора. Оно может быть обычным образом выражено через континуальный интеграл:

$$\varphi(x(-\infty),\, x(+\infty)) \; = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L\left(\dot{x}(t),\, x(t)\right) dt\right) \prod_t dx(t). \qquad (1.180)$$

Используя разложение амплитуды перехода в ряд теории возмущений, мы можем написать:

$$\int \psi^*_{out}(x_N,\, t_N)\psi^{(+)}(x_N,\, t_N)dx_N \; = \iint \psi^*_{out}(x_N,\, t_N)\varphi_0(x_0,\, x_N)\psi_{in}(x_0,\, t_0)dx_N dx_0 -$$

$$-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \iiint dx_N dx_0 dx \psi^*_{out}(x_N,\, t_N)\varphi_0(x_0,\, x)V(x)\,\varphi_0(x,\, x_N)\psi_{in}(x_0,\, t_0) + \ldots \quad (1.181)$$

Поскольку $\varphi_0(x_0,\ x_N)$ – свободный пропагатор, функция

$$\psi(x_N,\, t_N) = \int \varphi_0(x_0,\, x_N)\psi_{in}(x_0,\, t_0)dx_0 \qquad (1.182)$$

представляет собой плоскую волну. Если волновая функция конечного состояния частицы – также плоская волна, то при соответствующей нормировке плоских волн получаем известное выражение для S-матрицы:

$$< \psi^I_{out} \,|\, \hat{S}(-\infty,\, +\infty) \,|\, \psi^I_{in} > = \delta(p_{in} - p_{out}) -$$

$$-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \iiint dx^{(+)}dx^{(-)}dx\psi^*_{out}(x(+\infty))\varphi_0(x(+\infty),\ x)\times$$

$$\times V(x)\varphi_0(x(-\infty),\ x)\psi_{in}(x(-\infty)) + \ldots \tag{1.183}$$

p_{in}, p_{out} – импульсы частицы в начальном и конечном состояниях.

2. Невырожденная квантовая теория поля

2.1. Амплитуда перехода между двумя полевыми конфигурациями

В квантовой теории поля идеи Фейнмана обобщаются на случай систем с бесконечным числом степеней свободы. В начале мы будем говорить, для определенности, о свободном действительном скалярном поле с лагранжианом

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{2.1}$$

Амплитуда перехода между двумя полевыми конфигурациями, $\phi(\vec{x},\ t)$ и $\phi(\vec{x},\ t')$, соответствующим моментам времени t и t', определяется через континуальный интеграл следующим образом:

$$< \phi(\vec{x},\ t') \,|\, \phi(\vec{x},\ t) > = \int \exp\left(i \int\limits_t^{t'} d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 \right] \right) \times$$

$$\times \prod_{t\,<\tau\,<t'} \prod_{\vec{x}} d\phi(\vec{x},\ \tau) \;= \int \exp\left(i \int\limits_t^{t'} d\tau \int d^3x \left[\pi\partial_0\phi - \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{m^2}{2}\phi^2 \right] \right) \prod_{t\,<\tau\,<t'} \prod_{\vec{x}} d\phi(\vec{x},\ \tau) \prod_{t\leq\tau\leq t'} \prod_{\vec{x}} \frac{d\pi(\vec{x},\ \tau)}{2\pi} \tag{2.2}$$

Мера в континуальном интеграле обычно принимается тривиальной. Однако, проблемы, связанные с определением волновой функции и выводом уравнения для этой функции в квантовой теории поля отступают; основное внимание уделяется матрице рассеяния и функциям Грина, к изучению которых мы теперь и перейдем.

2.2. Функции Грина: выражение через континуальный интеграл

По определению, двухточечной функцией Грина в квантовой теории поля называют вакуумное среднее от хронологического произведения гейзенберговских операторов

$$G(t_1,\ t_2) = < 0 \,|\, T\left(\hat{q}^H(t_1) \hat{q}^H(t_2) \right) \,|\, 0 > \ . \tag{2.3}$$

Здесь величины q – это обобщенные координаты, например, полевые переменные.

Это выражение может быть преобразовано следующим образом:

$$G(t_1,\, t_2) = \iint \,<0\,|\,q',\, t'> \,<q',\, t'\,|\,T\left(\hat{q}^H(t_1)\hat{q}^H(t_2)\right)\,|\,q,\, t> <q,\, t\,|\,0>\, dqdq' \tag{2.4}$$

Здесь

$$<0\,|\,q,\, t> = \psi_0(q)\exp\left(iE_0 t\right) \tag{2.5}$$

– волновая функция основного состояния системы в координатном представлении.

Пусть теперь

$$t_1 > t_2. \tag{2.6}$$

Тогда

$$<q',\, t'\,|\,T\left(\hat{q}^H(t_1)\hat{q}^H(t_2)\right)\,|\,q,\, t> = <q',\, t'\,|\,\hat{q}^H(t_1)\hat{q}^H(t_2)\,|\,q,\, t> =$$

$$= \iint \,<q',\, t'\,|\,q_1,\, t_1> <q_1,\, t_1\,|\,\hat{q}^H(t_1)\,|\,q_2,\, t_2> \,<q_2,\, t_2\,|\,\hat{q}^H(t_2)\,|\,q,\, t>\, dq_1dq_2 =$$

$$= \iint q(t_1)q(t_2)\,<q',\, t'\,|\,q_1,\, t_1> <q_1,\, t_1\,|\,q_2,\, t_2> \,<q_2,\, t_2\,|\,q,\, t>\, dq_1dq_2 =$$

$$= \int q(t_1)q(t_2)\exp\left(i\int\limits_t^{t'} L(q)d\tau\right)\prod_{t<\tau<t'} dq(\tau); \tag{2.7}$$

Аналогично при $t_1 < t_2$.

$$G(t_1,\, t_2) = \iint dqdq'\psi_0^*(q')\psi_0(q)\exp\left(-iE_0(t'-t)\right)\times$$

$$\times\int q(t_1)q(t_2)\exp\left(i\int\limits_t^{t'} L(q)d\tau\right)\prod_{t<\tau<t'} dq(\tau). \tag{2.8}$$

Мы теперь покажем, что двухточечную функцию Грина можно определить следующим образом:

$$G(t_1,\, t_2) = \lim_{\substack{t\to +i\infty \\ t'\to -i\infty}}\left(\frac{1}{<q',\, t'\,|\,q,\, t>}\times\right.$$

$$\left.\times\int q(t_1)q(t_2)\exp\left(i\int\limits_t^{t'} L(q)d\tau\right)\prod_{t<\tau<t'} dq(\tau)\right). \tag{2.9}$$

Заметим, что

$$<q',\, t'\,|\,q,\, t> = <q'\,|\exp\left(-i\hat{H}(t'-t)\right)\,|\,q> =$$

$$= \sum_{m,n}\,<q'\,|\,m> <m\,|\exp\left(-i\hat{H}t'\right)\exp\left(i\hat{H}t\right)\,|\,n> \,<n\,|\,q>\,. \tag{2.10}$$

Здесь $|\,n>$ – собственные состояния гамильтониана, т. е.

$$\hat{H}\,|\,n>=E_n\,|\,n>; \tag{2.11}$$

$$\psi_n(q)=<n\,|\,q>, \tag{2.12}$$

состояния $|\,q>,\ |\,n>$ есть гейзенберговские состояния (не зависят от времени).

$$<q',\ t'\,|\,q,\ t>=\sum_{m,n}\psi^*_m(q')\psi_n(q)\exp\left(-iE_m t'\right)\,\exp\left(iE_n t\right)\ <m\,|\,n>=$$

$$=\sum_n\psi^*_n(q')\psi_n(q)\exp\left(-iE_n(t'-t)\right). \tag{2.13}$$

Рассмотрим предел этого выражения при $t\to+i\infty,\ t\to-i\infty$. Пусть энергия основного состояния системы $E_0=0$, тогда в сумме (2.13) все члены будут стремиться к 0, за исключением члена, соответствующего основному состоянию. Иными словами, остается только вклад основного состояния системы:

$$\lim_{\substack{t\,\to\,+i\infty\\ t'\,\to\,-i\infty}}\ <q',\ t'\,|\,q,\ t>=\psi^*_0(q')\psi_0(q)\exp\left(-iE_0(t'-t)\right) \tag{2.14}$$

Далее имеем:

$$\lim_{\substack{t\,\to\,+i\infty\\ t'\,\to\,-i\infty}}\ <q',\ t'\,|\,T\left(\hat{q}^H(t_1)\hat{q}^H(t_2)\right)\,|\,q,\ t>=$$

$$=\lim_{\substack{t\,\to\,+i\infty\\ t'\,\to\,-i\infty}}\iint dQ'dQ\ <q',\ t'\,|\,Q',\ T'>\ \times$$

$$\times\ <Q',\ T'\,|\,T\left(\hat{q}^H(t_1)\hat{q}^H(t_2)\right)\,|\,Q,\ T><Q,\ T\,|\,q,\ t>=$$

$$=\iint dQ'dQ\psi^*_0(q')\psi_0(Q')\exp\left(-iE_0(t'-T')\right)\ <Q',\ T'\,|\,T\left(\hat{q}^H(t_1)\hat{q}^H(t_2)\right)\,|\,Q,\ T>\ \times$$

$$\times\psi^*_0(Q)\psi_0(q)\exp\left(-iE_0(T-t)\right)\ =\psi^*_0(q')\psi_0(q)\exp\left(-iE_0t'\right)\exp\left(iE_0t\right)\times$$

$$\times\iint dQ'dQ\psi_0(Q')\exp\left(iE_0T'\right)\times$$

$$\times\ <Q',\ T'\,|\,T\left(\hat{q}^H(t_1)\hat{q}^H(t_2)\right)\,|\,Q,\ T>\ \psi^*_0(Q)\exp\left(-iE_0T\right)=$$

$$=\lim_{\substack{t\,\to\,+i\infty\\ t'\,\to\,-i\infty}}\ <q',\ t'\,|\,q,\ t>\iint dQ'dQ\ <0\,|\,Q',\ T'>\ \times$$

$$\times\ <Q',\ T'\,|\,T\left(\hat{q}^H(t_1)\hat{q}^H(t_2)\right)\,|\,Q,\ T><Q,\ T\,|\,0>=$$

$$=\lim_{\substack{t\,\to\,+i\infty\\ t'\,\to\,-i\infty}}\ <q',\ t'\,|\,q,\ t><0\,|\,T\left(\hat{q}^H(t_1)\hat{q}^H(t_2)\right)\,|\,0>=$$

$$= \lim_{\substack{t \to +i\infty \\ t' \to -i\infty}} < q',\ t' \,|\, q,\ t > G(t_1,\ t_2); \tag{2.15}$$

отсюда

$$G(t_1,\ t_2) = \lim_{\substack{t \to +i\infty \\ t' \to -i\infty}} \left(\frac{1}{< q',\ t' \,|\, q,\ t >} < q',\ t' \,|\, T\left(\hat{q}^H(t_1)\hat{q}^H(t_2)\right) |\, q,\ t > \right), \tag{2.16}$$

что совпадает с (2.9). Как мы знаем, и числитель, и знаменатель в (2.16) выражаются через континуальные интегралы.

Соответственно, n-точечная функция Грина определяется как

$$G(t_1,\ \ldots t_n) = < 0 \,|\, T\left(\hat{q}^H(t_1)\ldots\hat{q}^H(t_n)\right) |\, 0 > = \lim_{\substack{t \to +i\infty \\ t' \to -i\infty}} \left(\frac{1}{< q',\ t' \,|\, q,\ t >} \times \right.$$

$$\left. \times \int q(t_1)\ldots q(t_n) \exp\left(i \int\limits_t^{t'} L(q) d\tau \right) \prod_{t < \tau < t'} dq(\tau) \right). \tag{2.17}$$

2.3. Производящий функционал для функций Грина свободных полей

Рассмотрим функционал

$$Z_0[J] = \lim_{\substack{t \to +i\infty \\ t' \to -i\infty}} \left[\frac{1}{< \phi(\vec{x},\ t') \,|\, \phi(\vec{x},\ t) >} \times \right.$$

$$\left. \times \int \exp\left(i \int\limits_t^{t'} d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi \right] \right) \prod_{t < \tau < t'} \prod_{\vec{x}} d\phi(\vec{x},\ \tau) \right]. \tag{2.18}$$

В показателе экспоненты здесь стоит эффективное действие для скалярного поля, включающее источник поля $J(x)$. Очевидно, что уравнения поля, получаемые при варьировании эффективного действия есть

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = J. \tag{2.19}$$

Для нас интеграл (2.18) интересен тем, что его вариационные производные по источнику J дают функции Грина. Действительно,

$$(-i)^n \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)}\bigg|_{J(x)=0} = \lim_{\substack{t \to +i\infty \\ t' \to -i\infty}} \left[\frac{1}{< \phi(x') \,|\, \phi(x) >} \times \right.$$

$$\times \int \phi(x_1)\dots\phi(x_n)\exp\left(i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{m^2}{2}\phi^2\right]\right)\prod_x d\phi(x)\Bigg] = G_0(x_1,\ \dots,\ x_n), \tag{2.20}$$

что полностью согласуется с (2.17). Здесь и далее мы принимаем, что $(\vec{x},\ t) \equiv x$.

Функции Грина, таким образом, являются коэффициентами разложения функционала (2.18) по степеням $J(x)$:

$$Z_0[J] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\iint\dots\int dx_1\dots dx_n J(x_1)\dots J(x_n)\left.\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)}\right|_{J(x)=0} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\iint\dots\int dx_1\dots dx_n J(x_1)\dots J(x_n) G_0(x_1,\ \dots,\ x_n) \tag{2.21}$$

Функционал $Z_0[J]$ называется производящим функционалом для функций Грина свободного скалярного поля.

Проведя выкладки, аналогичные использованным в предыдущем разделе, можно показать, что функционал $Z_0[J]$ представляет собой, с точностью до нормировочного множителя, амплитуду перехода вакуум – вакуум в присутствии источника:

$$Z_0[J] = <0,\ +\infty\,|\,0,\ -\infty>^{\ J}. \tag{2.22}$$

Для того, чтобы в этом убедиться, определим амплитуду перехода в присутствии источника между состояниями, соответствующими моментам времени t и t', через континуальный интеграл:

$$<q',\ t'\,|\,q,\ t>^{\ J} = \int \exp\left[i\int_t^{t'}(L(q)+Jq)\,d\tau\right]\prod_{t<\tau<t'} dq(\tau) \tag{2.23}$$

Здесь опять величины q – обобщенные координаты (в частности, полевые переменные).

Предположим, однако, что источник $J(\tau)$ "включается" в момент времени T, более поздний, нежели момент времени t, и "выключается" в момент времени T', предшествующий моменту t'. Иными словами, здесь вновь используется адиабатическая гипотеза о медленном включении и выключении взаимодействия; дополнительный член в эффективном действии описывает взаимодействие поля с источником, не конкретизируя природу источника; источник отличен от 0 только в промежутке времени

$$[T,\ T']:\ t < T < T' < t'. \tag{2.24}$$

Тогда

$$\lim_{\substack{t\to+i\infty\\ t'\to-i\infty}} <q',\ t'\,|\,q,\ t>^{\ J} = \lim_{\substack{t\to+i\infty\\ t'\to-i\infty}}\iint dQ'dQ\ <q',\ t'\,|\,Q',\ T'> \times$$

$$\times <Q',\ T'\,|\,Q,\ T>^{\ J} <Q,\ T\,|\,q,\ t> = \iint dQ'dQ\psi_0^*(q')\psi_0(Q')\exp\left(-iE_0(t'-T')\right)\times$$

$$\times < Q',\, T' \,|\, Q,\, T > {}^J \psi_0^*(Q)\psi_0(q)\exp\left(-iE_0(T-t)\right) = \psi_0^*(q')\psi_0(q)\exp\left(-iE_0(t'-t)\right) \times$$

$$\times \iint dQ' dQ \psi_0(Q') \exp\left(iE_0 T'\right) < Q',\, T' \,|\, Q,\, T > {}^J\, \psi_0^*(Q) \exp\left(-iE_0 T\right) =$$

$$= \lim_{\substack{t \to +i\infty \\ t' \to -i\infty}} < q',\, t' \,|\, q,\, t > \iint dQ' dQ \, < 0 \,|\, Q',\, T' > < Q',\, T' \,|\, Q,\, T > {}^J < Q,\, T \,|\, 0 > =$$

$$= \lim_{\substack{t \to +i\infty \\ t' \to -i\infty}} < q',\, t' \,|\, q,\, t > < 0,\, +\infty \,|\, 0,\, -\infty > {}^J. \tag{2.25}$$

Отсюда следует

$$< 0,\, +\infty \,|\, 0,\, -\infty > {}^J = \lim_{\substack{t \to +i\infty \\ t' \to -i\infty}} \left(\frac{1}{< q',\, t' \,|\, q,\, t >} < q',\, t' \,|\, q,\, t > {}^J \right), \tag{2.26}$$

что совпадает с определением производящего функционала $Z_0[J]$.

Вернемся к определению производящего функционала для скалярного поля (2.18). Предполагая соответствующее поведение поля ϕ на пространственной бесконечности (заметим, что поведение поля на пространственной бесконечности не имеет отношения к граничным условиям в континуальном интеграле, которые накладываются в моменты времени t и t'), интеграл в числителе (2.18) можно переписать в виде

$$\int \exp\left(i \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\phi \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \phi + J\phi \right] \right) \prod_x d\phi(x) =$$

$$= \int \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi \hat{K} \phi + J\phi \right) \right] \prod_x d\phi(x), \tag{2.27}$$

где $\hat{K}$ – оператор уравнений движения свободного поля. Интеграл (2.27) представляет собой бесконечномерный аналог интеграла

$$\iint \ldots \int \exp\left(\sum_{i,I} \left[\sum_{j,J} \left(-\frac{1}{2} x_i^I \hat{K}_{IJ}^{ij} x_j^J \right) + J_I^i x_i^I \right] \right) \prod_k \prod_K dx_k^K, \tag{2.28}$$

причем индексы $I,\, J,\, \ldots$ нумеруют степени свободы системы, в то время как индексы $i,\, j,\, \ldots$ нумеруют точки разбиения временного интервала. Далее индексы $I,\, J,\, \ldots,$ нумерующие степени свободы будем опускать, чтобы не усложнять формулы.

Покажем, что с помощью подстановки

$$x_i = \bar{x}_i + y_i, \tag{2.29}$$

где $\bar{x}_i$ – точка, в которой квадратичная форма

$$-\frac{1}{2} x_i \hat{K}^{ij} x_j + J^i x_i \tag{2.30}$$

достигает минимума,

$$\bar{x}_i = \left(\hat{K}^{-1}\right)_{ij} J^j. \tag{2.31}$$

интеграл (2.28) сводится к гауссовому интегралу, изученному ранее. Действительно, квадратичная форма в показателе экспоненты преобразовывается следующим образом:

$$-\frac{1}{2}\left(y_i + (\hat{K}^{-1})_{ik}J^k\right)\hat{K}^{ij}\left(y_j + (\hat{K}^{-1})_{jl}J^l\right) + J^i\left(y_i + (\hat{K}^{-1})_{ij}J^j\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}y_i\hat{K}^{ij}y_j - \frac{1}{2}y_iJ^i - \frac{1}{2}y_jJ^j - \frac{1}{2}J^l(\hat{K}^{-1})_{lk}J^k + y_iJ^i + J^i(\hat{K}^{-1})_{ij}J^j =$$

$$= -\frac{1}{2}y_i\hat{K}^{ij}y_j + \frac{1}{2}J^l(\hat{K}^{-1})_{lk}J^k, \tag{2.32}$$

так что интеграл принимает вид:

$$\iint\ldots\int \exp\left[-\frac{1}{2}x_i\hat{K}^{ij}x_j + J^ix_i\right]\prod_k dx_k = \exp\left(\frac{1}{2}J^i(\hat{K}^{-1})_{ij}J^j\right)\times$$

$$\times\iint\ldots\int \exp\left(-\frac{1}{2}y_i\hat{K}^{ij}y_j\right)\prod_k dy_k. \tag{2.33}$$

Соответственно, в интеграле (2.27) нужно сделать замену

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x) + \int \hat{K}^{-1}(x-y)J(y)d^4y, \tag{2.34}$$

в результате которой получаем:

$$\int \exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi + J\phi\right)\right]\prod_x d\phi(x) =$$

$$= \exp\left(\frac{i}{2}\iint J(x)\hat{K}^{-1}(x-y)J(y)d^4xd^4y\right)\int \exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{2}\tilde{\phi}\hat{K}\tilde{\phi}\right)\right]\prod_x d\tilde{\phi}(x). \tag{2.35}$$

Континуальный интеграл по $d\tilde{\phi}(x)$ в (2.35) как раз-таки представляет амплитуду перехода между двумя полевыми конфигурациями в моменты времени t и t', которая стоит в знаменателе в (2.18). Поэтому, возвращаясь к формуле (2.18), мы получаем:

$$Z_0[J] = \exp\left(\frac{i}{2}\iint J(x)\hat{K}^{-1}(x-y)J(y)d^4xd^4y\right). \tag{2.36}$$

Здесь выполняется следующее условие нормировки: при $J = 0$, т. е. в отсутствие источника, производящий функционал равен 1:

$$Z_0[0] = 1. \tag{2.37}$$

Отметим также, что с помощью гауссовых квадратур континуальный интеграл в (2.35) может быть вычислен явным образом. Мы имеем:

$$\int \exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi\right)\right]\prod_x d\phi(x) = \left(\det\left\|\frac{i}{2\pi}\hat{K}\right\|\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.38}$$

В случае комплексных полей мы имеем интегралы вида

$$\iint\ldots\int \exp\left(-\frac{1}{2}z_i^*\hat{K}^{ij}z_j\right)\prod_k dz_k^*dz_k, \tag{2.39}$$

в которых обычным образом делается переход к действительным переменным

$$z = x+iy;\ z^* = x-iy, \tag{2.40}$$

якобиан преобразования которого равен $2i$, так что

$$\iint\ldots\int \exp\left(-\frac{1}{2}z_i^*\hat{K}^{ij}z_j\right)\prod_k dz_k^*dz_k =$$

$$= \iint\ldots\int \exp\left(-\frac{1}{2}x_i\hat{K}^{ij}x_j-\frac{1}{2}y_i\hat{K}^{ij}y_j\right)\prod_k(2i)dx_kdy_k \tag{2.41}$$

$$\int \exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{2}\phi^*\hat{K}\phi\right)\right]\prod_x d\phi^*(x)d\phi(x) = \left(\det\left\|\frac{1}{\pi}\hat{K}\right\|\right)^{-1}. \tag{2.42}$$

Вернемся к выражению (2.36) для производящего функционала. Беря вариационные производные, мы получаем:

$$-\left.\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\right|_{J(x)=0} = \hat{K}^{-1}(x-y). \tag{2.43}$$

В данном случае

$$\hat{K}(x-x') = \left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\delta(x-x'). \tag{2.44}$$

Ясно, что обратный оператор представляет собой функцию Грина, т. е. решение уравнения

$$\int d^4x'\hat{K}(x-x')G_0(x'-y) = \delta(x-y). \tag{2.45}$$

Совершая фурье-преобразование

$$G_0(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{-ik(x-y)}G_0(k), \tag{2.46}$$

получаем уравнение для фурье-образа функции Грина

$$\left(-k^2+m^2\right)G_0(k) = 1, \tag{2.47}$$

откуда

$$G_0(k) = -\frac{1}{k^2 - m^2}. \tag{2.48}$$

Функция Грина (2.46), (2.48) является недоопределенной, так как не указан способ обхода полюсов при интегрировании по k_0 в комплексной плоскости. Для того, чтобы это сделать, необходимо доопределить оператор уравнений поля $\hat{K}$, а, тем самым, и производящий функционал.

В случае опережающей и запаздывающей функций Грина оператор $\hat{K}$ доопределяется как

$$\hat{K}^{(adv)} = (\partial_0 - \varepsilon)^2 + \partial_i\partial^i + m^2; \tag{2.49}$$

$$\hat{K}^{(ret)} = (\partial_0 - \varepsilon)^2 + \partial_i\partial^i + m^2. \tag{2.50}$$

Соответствующие функции Грина:

$$G_0^{(adv)}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{-ikx}}{(k_0 - i\varepsilon)^2 - \vec{k}^2 - m^2}; \tag{2.51}$$

$$G_0^{(ret)}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{-ikx}}{(k_0 + i\varepsilon)^2 - \vec{k}^2 - m^2}. \tag{2.52}$$

Полюса этих функций, соответственно,

$$k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\varepsilon;\ (adv) \tag{2.53}$$

$$k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\varepsilon.\ (ret) \tag{2.54}$$

Так, в случае запаздывающей функции Грина ее полюса сдвинуты в нижнюю часть комплексной плоскости. При $t < 0$ контур интегрирования замыкается в верхней полуплоскости; в показателе экспоненты имеем: $-ikt = t\,\mathrm{Im}\,k$; $G_0^{(ret)}(x) = 0$ при $t < 0$. Напротив, $G_0^{(adv)}(x) = 0$ при $t > 0$. Иными словами, $G_0^{(ret)}(x) = 0$ вне будущего светового конуса; $G_0^{(adv)}(x) = 0$ вне прошлого светового конуса.

Наконец, в случае причинной функции Грина (фейнмановского пропагатора) мы имеем:

$$\hat{K}^{(c)} = \partial_\mu\partial^\mu + m^2 - i\varepsilon; \tag{2.55}$$

$$G_0^{(c)}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}; \tag{2.56}$$

полюса

$$k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\varepsilon} = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \mp \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}}. \tag{2.57}$$

Итак, для того, чтобы получить, например, производящий функционал для причинных функций Грина, необходимо использовать функционал

$$Z_0[J] = \int \exp\left(i\int d^4x \left[-\frac{1}{2}\phi\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2 - i\varepsilon\right)\phi + J\phi\right]\right)\prod_x d\phi(x)\times$$

$$\times \left[\int \exp \left(i \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\phi \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right) \phi \right] \right) \prod_x d\phi(x) \right]^{-1}, \tag{2.58}$$

где берутся соответствующие пределы интегрирования по времени.

2.4. Замечание о евклидовых функциях Грина

Выше мы дали определение функций Грина, а также производящего функционала, в которых континуальные интегралы по полевым конфигурациям на временном интервале $[t,\ t']$ рассматриваются в пределе $t \to +i\infty$, $t' \to -i\infty$. Этот формально-математический прием подразумевает переход к мнимому времени: действительно, временная ось поворачивается на угол $\dfrac{\pi}{2}$ в комплексной плоскости. Этот прием известен в квантовой теории поля как поворот Вика.

Вместо поворота на угол $\dfrac{\pi}{2}$ можно ввести иное условие: рассматривать континуальные интегралы в пределе

$$t \to +\infty(1 + i\delta);\ t' \to -\infty(1 + i\delta), \tag{2.59}$$

причем $\delta \to 0$.

В последнем случае, очевидно, имеет значение порядок выполнения предельных переходов: необходимо сначала устремить к соответствующим пределам временные аргументы t, t', после чего устремить к нулю параметр δ. По-существу это ничего не меняет – временная ось поворачивается в комплексной плоскости на малый угол δ.

Можно вообще переписать все приведенные выше формулы в мнимом времени, сделав замену переменных

$$x_0 = t = -ix_4. \tag{2.60}$$

При этом пространственно-временной интервал становится евклидовым

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = -\sum_{\mu=1}^{4} (dx^\mu)^2, \tag{2.61}$$

так что соответствующая формулировка квантовой теории поля называется квантовой теорией поля в евклидовом пространстве. Это же название сохраняется и в гравитации при переходе к мнимому времени, хотя пространство там отнюдь не евклидово (не плоское). Так, амплитуда перехода между двумя полевыми конфигурациями в евклидовом пространстве запишется как

$$< \phi(x') \,|\, \phi(x) >_E\ = \int \exp \left(- \int d_E^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_E^\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right] \right) \prod_x d\phi(x), \tag{2.62}$$

где учтено, что

$$d_E^4x = -id^4x, \tag{2.63}$$

и т. д. Континуальный интеграл (2.62) оказывается конечным, поскольку показатель экспоненты (евклидово действие) отрицательно определен. Таким образом, переход к мнимому времени обеспечивает сходимость континуального интеграла. После проведения выкладок с такими интегралами можно вернуться к реальному времени путем аналитического продолжения.

Так, евклидов производящий функционал для функций Грина имеет вид:

$$Z_{E0}[J] = \lim_{\substack{t \to -\infty \\ t' \to +\infty}} \left[\frac{1}{< \phi(x') \,|\, \phi(x) >\ _E} \times \right.$$

$$\left. \times \int \exp\left(- \int d_E^4 x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 - J\phi \right] \right) \prod_x d\phi(x) \right]. \tag{2.64}$$

Соответственно, евклидовы функции Грина есть

$$G_{E0}(x_1,\ \ldots,\ x_n) = i^n G_0(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \left. \frac{\delta Z_{E0}[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)} \right|_{J(x)=0} =$$

$$= \lim_{\substack{t \to -\infty \\ t' \to +\infty}} \left[\frac{1}{< \phi(x') \,|\, \phi(x) >\ _E} \int \phi(x_1)\ldots\phi(x_n) \exp\left(- \int d_E^4 x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right] \right) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_x d\phi(x) \right]. \tag{2.65}$$

Чтобы сохранить форму $-ikx$, вводится переменная

$$k_4 = -ik_0. \tag{2.66}$$

Например, двухточечная функция Грина (фейнмановский пропагатор) запишется в виде

$$G_{E0}(x-y) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d_E^4 k \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + m^2}. \tag{2.67}$$

Заметим, что эта функция не нуждается в доопределении – она имеет полюса в точках, которые лежат на мнимой оси:

$$k_0 = \pm i\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \tag{2.68}$$

2.5. Производящий функционал для функций Грина взаимодействующих полей

Определим теперь производящий функционал для функций Грина взаимодействующих полей. Рассмотрим случай скалярного поля с самодействием, описываемым лагранжианом $\mathcal{L}_{(int)}$($\mathcal{L}_0$ – лагранжиан свободного поля):

$$Z[J] = \int \prod_x d\phi(x) \exp\left[i \int d^4 x \left(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{(int)} + J\phi \right) \right] \times$$

$$\times \left(\int \prod_x d\phi(x) \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{(int)} \right) \right] \right)^{-1}. \tag{2.69}$$

Покажем, что производящий функционал для взаимодействующих полей может быть представлен в виде:

$$Z[J] = N \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{(int)} \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) \right] Z_0[J], \tag{2.70}$$

N – нормировочный множитель.

Здесь $\exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{(int)} \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right) \right]$ следует рассматривать как символическую запись, которая предполагает разложение в ряд экспоненты от функционального оператора по степеням константы взаимодействия. Имеется в виду, что зависимость оператора $\mathcal{L}_{(int)} \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right)$ от функциональных производных совпадает с зависимостью лагранжиана взаимодействия от полевых переменных.

Пусть

$$\mathcal{L}_{(int)}(\phi) = -\frac{g}{4!}\phi^4; \tag{2.71}$$

$$Z[J] = N \left[1 - \frac{ig}{4!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right)^4 + O(g^2) \right] \times$$

$$\times \int \prod_x d\phi(x) \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi + J\phi \right) \right] \times$$

$$\times \left(\int \prod_x d\phi(x) \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi \right) \right] \right)^{-1} =$$

$$= \tilde{N} \int \prod_x d\phi(x) \left(\left[1 - \frac{ig}{4!} \int d^4x\phi^4 + O(g^2) \right] \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi + J\phi \right) \right] \right) =$$

$$= \tilde{N} \int \prod_x d\phi(x) \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi - \frac{g}{4!}\phi^4 + J\phi \right) \right] \tag{2.72}$$

что соответствует (2.69).

Нормировочный множитель определяется из соотношения:

$$\tilde{N} = N \left(\int \prod_x d\phi(x) \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi \right) \right] \right)^{-1} =$$

$$= \left(\int \prod_x d\phi(x) \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi - \frac{g}{4!}\phi^4 \right) \right] \right)^{-1}. \tag{2.73}$$

Далее,

$$Z[J]=N\int\prod_x d\phi(x)\left(\left[1-\frac{ig}{4!}\int d^4x\phi^4+O(g^2)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi+J\phi\right)\right]\right)\left(\int\prod_x d\phi(x)\exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi\right)\right]\right)^{-1}=$$

$$=N\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right]+O(g)\ =NZ_0[J]+O(g); \tag{2.74}$$

$$Z_0[J]=\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right] \tag{2.75}$$

– нормированный производящий функционал для функций Грина свободного поля.

Полные функции Грина определяются как

$$G(x_1,\ \ldots,\ x_n)\ =\frac{\delta}{i\delta J(x_1)}\frac{\delta}{i\delta J(x_2)}\cdots\frac{\delta}{i\delta J(x_n)}Z[J]\Bigg|_{J(x)=0} \tag{2.76}$$

В частности,

$$G(x,\ y)=-\frac{\delta^2Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\Bigg|_{J(x)=0}=-N\frac{\delta^2Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\Bigg|_{J(x)=0}+O(g)=NG_0^{(c)}(x,\ y)+O(g) \tag{2.77}$$

– ряд возмущений для функций Грина. Первый член ряда – функция Грина (пропагатор) свободного поля $G_0^{(c)}(x,\ y)$.

2.6. Проведение вычислений с помощью производящего функционала

Производящий функционал $Z[J]$ (2.69) можно непосредственно использовать для вычисления функций Грина. Выкладки обычно проводятся по теории возмущений. Числитель и знаменатель функционала (2.69) раскладывается в ряд по степеням константы связи, после чего берутся вариационные производные по источнику. Так, например, в теории ϕ^4, для того, чтобы провести выкладки с точностью до первого порядка по g, необходимо вычислить выражение

$$\left[1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^4\right]\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right], \tag{2.78}$$

которое стоит в числителе (2.69), и такое же выражение в знаменателе (2.69), при $J(x)=0$. При делении на выражение, стоящее в знаменателе, сокращаются вклады вакуумных диаграмм, т. е. диаграмм без внешних линий, что естественно, поскольку знаменатель представляет собой амплитуду перехода вакуум – вакуум в отсутствие источника.

$$\frac{\delta}{i\delta J(z)} \exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int d^4xd^4y\delta(x-z)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y) + \int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)\delta(y-z)\right]\times$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right] = \int d^4xJ(x)G_0^{(c)}(x,\ z)\times$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right]; \tag{2.79}$$

$$\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^2 \exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right] =$$
$$= \left[-iG_0^{(c)}(z,\ z) + \left(\int d^4xJ(x)G_0^{(c)}(x,\ z)\right)^2\right]\times$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right]; \tag{2.80}$$

$$\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^3 \exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right] =$$
$$= \left[-3iG_0^{(c)}(z,\ z)\int d^4xJ(x)G_0^{(c)}(x,\ z) + \left(\int d^4xJ(x)G_0^{(c)}(x,\ z)\right)^3\right]\times$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right]; \tag{2.81}$$

$$\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^4 \exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right] = \left[-3\left(G_0^{(c)}(z,\ z)\right)^2 -\right.$$
$$\left.-6iG_0^{(c)}(z,\ z)\left(\int d^4xJ(x)G_0^{(c)}(x,\ z)\right)^2 + \left(\int d^4xJ(x)G_0^{(c)}(x,\ z)\right)^4\right]\times$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right]. \tag{2.82}$$

Итак, в числителе (2.69) получается выражение

$$\left(1 - \frac{ig}{4!}\int d^4z\left[-3\left(G_0^{(c)}(z,\ z)\right)^2 - 6iG_0^{(c)}(z,\ z)\left(\int d^4xJ(x)G_0^{(c)}(x,\ z)\right)^2 +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\int d^4xJ(x)G_0^{(c)}(x,\ z)\right)^4\right] + O(g^2)\right)\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right], \tag{2.83}$$

которое умножается на

$$\left(\left[1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left(\frac{\delta}{i\delta J(z)}\right)^4\right]\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right]\bigg|_{J(x)=0}\right)^{-1}=$$

$$=\left(1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left[-3\left(G_0^{(c)}(z,\ z)\right)^2\right]+O(g^2)\right)^{-1}, \tag{2.84}$$

так что после разложения (2.84) в ряд по степеням g в первом порядке остается

$$Z[J]=\left(1-\frac{ig}{4!}\int d^4z\left[-6iG_0^{(c)}(z,\ z)\left(\int d^4xJ(x)G_0^{(c)}(x,\ z)\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\int d^4xJ(x)G_0^{(c)}(x,\ z)\right)^4\right]+O(g^2)\right)\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x,\ y)J(y)\right]. \tag{2.85}$$

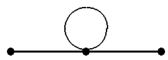
Беря вариационные производные, получим двухточечную функцию Грина с точностью до первого порядка

$$G(x,\ y)=-iG_0^{(c)}(x,\ y)+\frac{g}{2}\int d^4zG_0^{(c)}(z,\ z)G_0^{(c)}(x,\ z)G_0^{(c)}(y,\ z)+O(g^2). \tag{2.86}$$

В фейнмановской диаграмной технике каждому пропагатору $G_0^{(c)}(x,\ y)$ сопоставляется линия

$G_0^{(c)}(x,\ y)=x$ y (2.87)

так что в графическом представлении

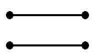
$G(x,\ y)=-i$ $+\frac{g}{2}$  $+O(g^2).$ (2.88)

Заметим, что $G_0^{(c)}(z,\ z)$ сопоставляется замкнутая петля.

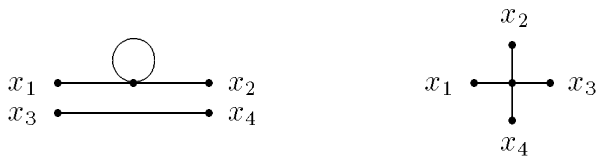
Результат (2.86), (2.88) можно было ожидать из общих соображений, поскольку в теории ϕ^4 имеется только один тип вершин

g  (2.89)

Двухточечная функция (2.88), как мы видим, содержит только связные диаграммы, в то время как уже четырехточечная функция Грина будет содержать несвязные. Вычисления показывают, что в нулевом порядке четырехточечной функции Грина сопоставляется диаграмма

x_1 x_2
 (2.90)
x_3 x_4

а в первом порядке по g – диаграммы

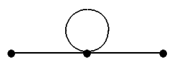


(2.91)

так что из трех диаграмм (2.90), (2.91) только одна является связной. Каждая диаграмма входит в соответствующую функцию Грина с множителем, с помощью которого учитываются всевозможные способы соединения точек x_1, x_2, x_3, x_4 в данную диаграмму. Например, для диаграммы (2.90) таких способов 3, для первой из двух диаграмм (2.91) – $3 \times 4 \times 2 \times 3$ способа, для второй – 4! (точка x_1 соединяется с одним из четырех концов вершины (2.89), точка x_2 – с одним из трех оставшихся свободными концов и т. д.). При дифференцировании производящего функционала эти множители возникают автоматически.

2.7. Производящий функционал для связных диаграмм

На практике интерес представляют связные диаграммы Фейнмана, ибо они соответствуют нетривиальным вкладам в матрицу рассеяния, в отличие, например, от первой из диаграмм (2.91), которая соответствует двум частицам, невзаимодействующим между собой. Первая из диаграмм (2.91) может рассматриваться как произведение двух диаграмм

 и  (2.92)

И действительно, вычисления показывают, что первой из диаграмм (2.91) сопоставляется выражение

$$
\begin{aligned}
&-\frac{ig}{2}\int d^4z G_0^{(c)}(z,\ z)\Big(G_0^{(c)}(x_1,\ z)G_0^{(c)}(x_2,\ z)G_0^{(c)}(x_3,\ x_4)+\\
&+G_0^{(c)}(x_1,\ z)G_0^{(c)}(x_3,\ z)G_0^{(c)}(x_2,\ x_4)+G_0^{(c)}(x_1,\ z)G_0^{(c)}(x_4,\ z)G_0^{(c)}(x_3,\ x_2)+\\
&+G_0^{(c)}(x_2,\ z)G_0^{(c)}(x_3,\ z)G_0^{(c)}(x_1,\ x_4)+G_0^{(c)}(x_2,\ z)G_0^{(c)}(x_4,\ z)G_0^{(c)}(x_3,\ x_1)+\\
&+G_0^{(c)}(x_3,\ z)G_0^{(c)}(x_4,\ z)G_0^{(c)}(x_1,\ x_2)\Big)\,. \qquad (2.93)
\end{aligned}
$$

Вообще n-точечную функцию Грина можно представить в виде связной (или неприводимой) части и суммы ее несвязных частей, которые соответствуют произведениям функций Грина:

$$
G^{(n)}(x_1,\ \ldots,\ x_n) = G_{\text{св}}^{(n)}(x_1,\ \ldots,\ x_n) + \sum G^{(2)}(x_i,\ x_j)\times
$$

$$\times G^{(n-2)}(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_{j-1},\ x_{j+1},\ \ldots,\ x_n) + \sum G^{(4)}(x_i,\ x_j,\ x_k,\ x_l)\times$$
$$\times G^{(n-4)}(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_{j-1},\ x_{j+1},\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_{l-1},\ x_{l+1},\ \ldots,\ x_n)+$$
$$+\ldots \tag{2.94}$$

В (2.94) проводится суммирование по всем возможным способам выбрать из n точек $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$2 точки $(x_i,\ x_j)$, 4 точки $(x_i,\ x_j,\ x_k,\ x_l)$ и т. д.

В частности, для $n = 2$ имеем:

$$G^{(2)}(x_1,\ x_2) = G^{(2)}_{\text{св}}(x_1,\ x_2); \tag{2.95}$$

для $n = 4$:

$$G^{(4)}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = G^{(4)}_{\text{св}}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) + \sum G^{(2)}(x_1,\ x_2)G^{(2)}(x_3,\ x_4), \tag{2.96}$$

где проводится суммирование по всем возможным разбиениям индексов 1, 2, 3, 4 на пары.

Оказывается, существует производящий функционал, который дает только связные функции Грина. Он определяется соотношением

$$Z[J] = \exp\left(iW[J]\right). \tag{2.97}$$

Для того, чтобы убедиться в этом, нужно рассмотреть производные этого функционала:

$$\frac{\delta Z[J]}{i\delta J(x_1)} = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)}\exp\left(iW[J]\right); \tag{2.98}$$

$$-\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} = \left(-i\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} + \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x_2)}\right)\exp\left(iW[J]\right). \tag{2.99}$$

Воспользуемся условием нормировки производящего функционала Z[J]:

$$Z[0] = 1, \tag{2.100}$$

а также тем, что

$$\left.\frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)}\right|_{J(x)=0} = \left.\frac{1}{iZ[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)}\right|_{J(x)=0} = 0; \tag{2.101}$$

тогда

$$G(x_1,\ x_2) = -\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J(x)=0} = -i\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J(x)=0}. \tag{2.102}$$

(Как мы знаем, двухточечная функция Грина является связной.)

$$i\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)} = \left(-\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)}-\right.$$

$$-i\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x_3)} - i\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_3)}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x_2)}-$$

$$\left.-i\frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2)\delta J(x_3)} + \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x_2)}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x_3)}\right) \exp\left(iW[J]\right); \tag{2.103}$$

После взятия четвертой производной при $J=0$ остаются члены:

$$\left.\frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\right|_{J(x)=0} = i\left.\frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\right|_{J(x)=0} -$$

$$-\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J(x)=0}\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\right|_{J(x)=0} - \left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_3)}\right|_{J(x)=0}\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2)\delta J(x_4)}\right|_{J(x)=0} -$$

$$-\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_4)}\right|_{J(x)=0}\left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2)\delta J(x_3)}\right|_{J(x)=0} = i\left.\frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\right|_{J(x)=0} +$$

$$+\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J(x)=0}\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\right|_{J(x)=0} + \left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_3)}\right|_{J(x)=0}\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_2)\delta J(x_4)}\right|_{J(x)=0} +$$

$$+\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_4)}\right|_{J(x)=0}\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_2)\delta J(x_3)}\right|_{J(x)=0}, \tag{2.104}$$

формула (2.104) совпадает с (2.96).

Подобным образом можно продемонстрировать для всех n, что функционал $W[J]$ дает только связные функции Грина.

2.8. Континуальный интеграл по антикоммутирующим переменным

Как известно, операторы полей, подчиняющихся статистике Ферми, удовлетворяют антикоммутационным соотношениям:

$$\{\hat{\psi}^+(\vec{x}',\, t),\; \hat{\psi}(\vec{x},\, t)\}_+ = \delta(\vec{x}-\vec{x}'). \tag{2.105}$$

В этом случае, для того, чтобы выполнялся принцип соответствия, классические ферми-поля должны рассматриваться как антикоммутирующие величины, и континуальный интеграл для них должен строиться как интеграл по антикоммутирующим переменным. (Например, при этом сохраняется соответствие между классическими и квантовыми уравнениями движения, а при работе с континуальным интегралом часто возникает необходимость оценивать его на классических траекториях).

Алгебра антикоммутирующих переменных была построена еще в прошлом веке Г. Грассманом, а в нашем столетии развивалось и обобщалось в работах Ф. Березина.

Алгеброй Грассмана над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется алгебра, образующие которой η^α, $\alpha = 1, \ldots, m$, удовлетворяют антикоммутационным соотношениям:

$$\eta^\alpha \eta^\beta + \eta^\beta \eta^\alpha = 0. \tag{2.106}$$

Напоминание: образующими элементами алгебры $\mathcal{A}$ называются такое подмножество $\mathcal{X}$ элементов этой алгебры, что минимальная подалгебра в алгебре $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{X}$, совпадает с самой алгеброй $\mathcal{A}$. Вследствие этого любой элемент алгебры $\mathcal{A}$ может быть представлен в виде

$$f = f_0 + f_\alpha \eta^\alpha + f_{\alpha_1\alpha_2}\eta^{\alpha_1}\eta^{\alpha_2} + \ldots + f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\eta^{\alpha_1}\ldots\eta^{\alpha_m}, \tag{2.107}$$

$$f_0,\ f_\alpha,\ \ldots,\ f_{\alpha_1\ldots\alpha_m} \in \mathbb{C}. \tag{2.108}$$

Аналогично, мы можем рассмотреть алгебру аналитических (дифференцируемых, непрерывных) функций комплексных (действительных) переменных. Тогда обобщением (2.107) будет следующее:

$$f(z,\ \eta) = f_0(z) + f_\alpha(z)\eta^\alpha + f_{\alpha_1\alpha_2}(z)\eta^{\alpha_1}\eta^{\alpha_2} + \ldots + f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(z)\eta^{\alpha_1}\ldots\eta^{\alpha_m}, \tag{2.109}$$

причем все величины $f_0(z)$, $f_\alpha(z)$, $\ldots$, $f_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(z)$ принадлежат рассматриваемому классу функций. Фактически все элементы алгебры Грассмана представляются в виде разложения по степеням образующих, однако, если число образующих конечно, ряд обрывается, поскольку из (2.106) следует, что $(\eta^\alpha)^2 = 0$.

Введем понятие грассмановой четности. Элементы грассмановой алгебры, разложение которых (2.109) содержит только четные степени η, коммутируют со всеми остальными элементами грассмановой алгебры. Такие элементы будем называть четными; им приписывается грассманова четность 0. Элементы, разложение которых содержит только нечетные степени η, антикоммутируют между собой. Такие элементы называются нечетными; им приписывается грассманова четность 1. Четность произведения двух элементов f, g определяется формулой

$$P(fg) = (P(f) + P(g))\,(\mathrm{mod}\ 2). \tag{2.110}$$

(Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю n (n – натуральное число, отличное от 1), $a = b(\mathrm{mod}\, n)$, если эти числа дают при делении на n один и тот же остаток, т. е. их разность нацело делится на n).

В связи с тем, что переменные η являются антикоммутирующими, возникают понятия левой и правой производной.

Левая производная (стоит слева, действует направо):

$$\frac{\partial^l}{\partial\eta^\alpha}\left(\eta^\beta\eta^\gamma\right) = \frac{\partial^l\eta^\beta}{\partial\eta^\alpha}\eta^\gamma - \eta^\beta\frac{\partial^l\eta^\gamma}{\partial\eta^\alpha} = \delta^{\alpha\beta}\eta^\gamma - \delta^{\alpha\gamma}\eta^\beta. \tag{2.111}$$

Правая производная (стоит справа, действует налево):

$$\left(\eta^\beta\eta^\gamma\right)\frac{\partial^r}{\partial\eta^\alpha} = \eta^\beta\frac{\partial^r\eta^\gamma}{\partial\eta^\alpha} - \frac{\partial^r\eta^\beta}{\partial\eta^\alpha}\eta^\gamma = \delta^{\alpha\gamma}\eta^\beta - \delta^{\alpha\beta}\eta^\gamma. \tag{2.112}$$

Интеграл по нечетным образующим грассмановой алгебры определяется следующими свойствами:

$$\int d\eta^\alpha = 0; \int d\eta^\alpha \eta^\alpha = 1, \tag{2.113}$$

или, объединяя это вместе,

$$\int d\eta^\alpha \eta^\beta = \delta^{\alpha\beta}. \tag{2.114}$$

Заметим, что δ-функция для грассмановых переменных в силу (2.113) определяется как

$$\delta(\eta^\alpha) = \eta^\alpha. \tag{2.115}$$

Из этих правил вытекает, в частности, что операция интегрирования эквивалентна взятию левой производной. Действительно, беря производную от (2.109), будем иметь:

$$\frac{\partial^l}{\partial \eta^{\alpha_i}} f(z,\ \eta) = f_{\alpha_i}(z) + f_{\alpha_i \alpha_2}(z)\eta^{\alpha_2} - f_{\alpha_1 \alpha_i}(z)\eta^{\alpha_1} + \ldots +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} f_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} \alpha_i \alpha_{k+1} \ldots \alpha_m}(z)\eta^{\alpha_1} \ldots \eta^{\alpha_{k-1}} \eta^{\alpha_{k+1}} \ldots \eta^{\alpha_m} \tag{2.116}$$

Аналогичный результат получается при взятии интеграла по $d\eta^{\alpha_i}$ от (2.109), при этом образующие с номером α_i перемещаются влево, после чего снимается интеграл по $d\eta^{\alpha_i}$.

Теперь рассмотрим замену переменных в интегралах по грассмановым переменным. Вначале обратимся к одномерному случаю, когда

$$f(z,\ \eta) = f_0(z) + f_1(z)\eta. \tag{2.117}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int d\eta f(z,\ \eta) = f_1(z), \tag{2.118}$$

и проведем в нем замену переменных

$$\eta = B\eta'; \tag{2.119}$$

при этом

$$f(z,\ \eta') = f_0(z) + f_1(z)B\eta'; \tag{2.120}$$

$$\int d\eta' f(z,\ \eta') = f_1(z)B = f_1(z)\frac{\partial \eta}{\partial \eta'}. \tag{2.121}$$

Потребуем, чтобы замена переменных не изменяла значения интеграла. Тогда правило замены переменных запишется в виде

$$\int d\eta f(z,\ \eta) = \int d\eta' \left(\frac{\partial \eta}{\partial \eta'}\right)^{-1} f(z,\ \eta'). \tag{2.122}$$

Обратим внимание, что эта формула отличается от правила замены обычных (коммутирующих) переменных:

$$\int dz f(z,\ \eta) = \int dz' \frac{\partial z}{\partial z'} f(z',\ \eta). \tag{2.123}$$

В случае n-мерного интеграла для коммутирующих переменных справедлива формула:

$$\iint \ldots \int dz_1 \ldots dz_n f(z,\ \eta) \ = \iint \ldots \int dz'_1 \ldots dz'_n \det \left\| \frac{\partial z_i}{\partial z'_j} \right\| f(z',\ \eta). \tag{2.124}$$

Формула (2.122) позволяет ожидать, что ее обобщение на случай n-кратного интеграла имеет вид:

$$\iint \ldots \int d\eta^n \ldots d\eta^1 f(z,\ \eta) \ = \iint \ldots \int d\eta'^n \ldots d\eta'^1 \left(\det \left\| \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \eta'^\beta} \right\| \right)^{-1} f(z,\ \eta'). \tag{2.125}$$

причем $n \leq m$. Действительно, в разложении (2.109) при интегрировании по $d\eta^n \ldots d\eta^1$ в силу (2.114) ненулевой вклад в интеграл дают лишь члены, содержащие произведения n образующих $\eta^1 \ldots \eta^n$ и более. Рассмотрим свертку

$$f_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(z) \eta^{\alpha_1} \ldots \eta^{\alpha_n}. \tag{2.126}$$

Пользуясь тем, что

$$\eta^{\alpha_1} \ldots \eta^{\alpha_n} = \varepsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \eta^1 \ldots \eta^n, \tag{2.127}$$

(2.126) можно представить в виде

$$f_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(z) \eta^{\alpha_1} \ldots \eta^{\alpha_m} = f^{(n)}(z) \eta^1 \ldots \eta^n; \tag{2.128}$$

$$f^{(n)}(z) = f_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(z) \varepsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}. \tag{2.129}$$

В интеграле

$$\iint \ldots \int d\eta^n \ldots d\eta^1 f^{(n)}(z) \eta^1 \ldots \eta^n \tag{2.130}$$

выполним замену переменных

$$\eta^\alpha = B^\alpha_\beta \eta'^\beta, \tag{2.131}$$

так что

$$\eta^1 \ldots \eta^n = B^1_{\alpha_1} \ldots B^n_{\alpha_n} \eta'^{\alpha_1} \ldots \eta'^{\alpha_n} \ = B^1_{\alpha_1} \ldots B^n_{\alpha_n} \varepsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \eta'^1 \ldots \eta'^n. \tag{2.132}$$

Поскольку

$$B^\alpha_\beta = \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \eta'^\beta}, \tag{2.133}$$

$$B^1_{\alpha_1} \ldots B^n_{\alpha_n} \varepsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \det \left\| \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \eta'^\beta} \right\|; \tag{2.134}$$

$$\iint \ldots \int d\eta^n \ldots d\eta^1 f^{(n)}(z) \eta^1 \ldots \eta^n \ = \iint \ldots \int d\eta'^n \ldots d\eta'^1 \left(\det \left\| \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \eta'^\beta} \right\| \right)^{-1} \times$$

$$\times f^{(n)}(z)B^1_{\alpha_1}\dots B^n_{\alpha_n}\varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_n}\eta'^1\dots\eta'^n, \tag{2.135}$$

откуда следует формула (2.125). Поскольку интегрирование по грассмановым переменным эквивалентно левому дифференцированию, формулу (2.125) можно доказать, рассматривая замену переменных в дифференциальных выражениях. Ясно, что в этом случае должен появиться обратный якобиан.

Наконец, рассмотрим выполнение гауссовых квадратур, т. е. вычисление интегралов вида

$$\iint\dots\int d\eta^n\dots d\eta^1\exp\left(\frac{1}{2}\eta^\alpha K_{\alpha\beta}\eta^\beta\right), \tag{2.136}$$

где $K_{\alpha\beta}$ – антисимметричная матрица, элементы которой являются четными (коммутирующими) величинами (не зависят от η).

Обратимся к двумерному случаю

$$\hat{K}=\begin{pmatrix}0 & K_{12}\\ -K_{12} & 0\end{pmatrix}; \tag{2.137}$$

$$\frac{1}{2}\eta^\alpha K_{\alpha\beta}\eta^\beta=\frac{1}{2}\left(\eta^1K_{12}\eta^2+\eta^2K_{21}\eta^1\right)=\eta^1\eta^2K_{12}; \tag{2.138}$$

$$\iint d\eta^2d\eta^1\exp\left(\eta^1\eta^2K_{12}\right)=\iint d\eta^2d\eta^1\left(1+\eta^1\eta^2K_{12}\right)=K_{12}=\sqrt{\det\hat{K}}. \tag{2.139}$$

Заметим, что разложение экспоненты

$$\exp\left(\eta^1\eta^2K_{12}\right)=1+\eta^1\eta^2K_{12} \tag{2.140}$$

есть точное равенство в силу грассманова характера переменных.

При нечетном n интеграл (2.136) равен 0. При четном n ответ таков же, как и в случае $n=2$:

$$\iint\dots\int d\eta^n\dots d\eta^1\exp\left(\frac{1}{2}\eta^\alpha K_{\alpha\beta}\eta^\beta\right)=\sqrt{\det\hat{K}}. \tag{2.141}$$

В случае комплексных грассмановых переменных имеем:

$$\iint\dots\int d\eta^nd\bar{\eta}^n\dots d\eta^1d\bar{\eta}^1\exp\left(\bar{\eta}^\alpha K_{\alpha\beta}\eta^\beta\right)=\det\hat{K}. \tag{2.142}$$

2.9. Континуальный интеграл в голоморфном представлении. Гармонический осциллятор

Теперь нашей ближайшей задачей является вывод выражения для ядра S-матрицы в квантовой теории поля. Поскольку при вычислении элементов S-матрицы и вероятностей переходов в квантовой теории поля используется представление вторичного квантования, необходимо рассмотреть соответствующий формализм, а именно, интегралы по переменным a^*, a, которые при переходе к квантовой теории становятся операторами рождения и уничтожения $\hat{a}^+$, $\hat{a}$.

Мы начнем с рассмотрения гармонического осциллятора, после чего выведем выражение для ядра S-матрицы для скалярного поля. Напомним, что функция Гамильтона для гармонического осциллятора есть

$$H(p,\ q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}. \tag{2.143}$$

Введем переменные

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - ip);\ a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip). \tag{2.144}$$

В новых переменных

$$H(a^*,\ a) = \omega a^* a. \tag{2.145}$$

Соответствующие операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{a},\ \hat{a}^+] = 1;\ [\hat{a},\ \hat{a}] = 0;\ [\hat{a}^+,\ \hat{a}^+] = 0. \tag{2.146}$$

В квантовой механике из коммутационных соотношений (2.146) выводятся свойства операторов $\hat{a}^+$, $\hat{a}$. Напомним соответствующие рассуждения.

Пусть $\,|\, n>$ – собственный вектор оператора $\hat{a}^+\hat{a}$,

$$\hat{a}^+\hat{a}\,|\,n> = n\,|\,n>, \tag{2.147}$$

тогда

$$\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}\,|\,n> = \hat{a}\hat{a}^+\hat{a}\,|\,n> - \hat{a}\,|\,n> = (n-1)\hat{a}\,|\,n>, \tag{2.148}$$

$\hat{a}\,|\,n>$ – собственный вектор оператора $\hat{a}^+\hat{a}$, который отвечает собственному значению $(n-1)$, т. е.

$$\hat{a}\,|\,n> = C_1(n)\,|\,n-1>; \tag{2.149}$$

$$< m\,|\,\hat{a}^+\hat{a}\,|\,n> = C_1^*(m)C_1^*(n)\ < m-1\,|\,n-1> = n\delta_{mn}; \tag{2.150}$$

$$\Rightarrow\ |\,C_1(n)\,| = \sqrt{n};\ \hat{a}\,|\,n> = \sqrt{n}\,|\,n-1>\ . \tag{2.151}$$

Аналогично,

$$\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+\,|\,n> = \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\,|\,n> + \hat{a}^+\,|\,n> = (n+1)\hat{a}^+\,|\,n>; \tag{2.152}$$

$$\hat{a}^+\,|\,n> = C_2(n)\,|\,n+1>; \tag{2.153}$$

$$\begin{aligned} < m\,|\,\hat{a}\hat{a}^+\,|\,n> &= C_2^*(m)C_2(n)\ < m+1\,|\,n+1> = \\ &= < m\,|\,\hat{a}^+\hat{a}\,|\,n>\ +\ < m\,|\,n> = (n+1)\delta_{mn}; \end{aligned} \tag{2.154}$$

$$\Rightarrow\ |\,C_2(n)\,| = \sqrt{n+1};\ \hat{a}^+\,|\,n> = \sqrt{n+1}\,|\,n+1>\ . \tag{2.155}$$

Вектор $\hat{a}\,|\,n>$ в гильбертовом пространстве должен обладать неотрицательной нормой:

$$< n\,|\,\hat{a}^+\hat{a}\,|\,n> = n \geq 0. \tag{2.156}$$

$(\bar{n}+1)$-кратное действие оператора $\hat{a}$ на вектор $|\,n>$ ($\bar{n}$ – целая часть n) переведет вектор $|\,n>$ в вектор с отрицательной нормой. Чтобы этого избежать, постулируют существование вакуумного вектора (вектора вакуумного состояния), удовлетворяющего условию

$$\hat{a}\,|\,0>=0. \tag{2.157}$$

Все остальные собственные векторы оператора $\hat{a}^{+}\hat{a}$ получаются действием оператора $\hat{a}^{+}$ на вакуумный вектор:

$$|\,n>=\frac{(\hat{a}^{+})^{n}\,|\,0>}{\sqrt{n!}}. \tag{2.158}$$

При этом оператор $\hat{a}^{+}\hat{a}$ имеет целочисленный спектр: $n=0,1,2,\ldots$.

Рассмотрим функции переменных a^{*}, a

$$\psi_{n}(a^{*})=\frac{(a^{*})^{n}}{\sqrt{n!}} \tag{2.159}$$

и их линейные комбинации

$$f(a^{*}) \tag{2.160}$$

Введем скалярное произведение в пространстве аналитических функций $\{f(a^{*})\}$:

$$(f_{1},\ f_{2})=\int f_{1}^{*}(a^{*})f_{2}(a^{*})\exp(-a^{*}a)\frac{da^{*}da}{2\pi i}. \tag{2.161}$$

Покажем, что функции (2.159) образуют ортонормированный базис пространства.

$$<\psi_{n}\,|\,\psi_{m}>=\int\psi_{n}^{*}(a^{*})\psi_{m}(a^{*})\exp(-a^{*}a)\frac{da^{*}da}{2\pi i}=\frac{1}{\sqrt{n!m!}}\int a^{n}(a^{*})^{m}\exp(-a^{*}a)\frac{da^{*}da}{2\pi i}. \tag{2.162}$$

В интеграле (2.162)) сделаем замену

$$a=\rho e^{i\theta};\ a^{*}=\rho e^{-i\theta}; \tag{2.163}$$

$$da=e^{i\theta}(d\rho+i\rho d\theta);\ da^{*}=e^{-i\theta}(d\rho-i\rho d\theta); \tag{2.164}$$

$$da^{*}da=2i\rho d\rho d\theta. \tag{2.165}$$

$$<\psi_{n}\,|\,\psi_{m}>=\frac{1}{\pi\sqrt{n!m!}}\int\limits_{0}^{\infty}\rho d\rho\int\limits_{0}^{2\pi}d\theta\rho^{n+m}e^{i\theta(n-m)}e^{-\rho^{2}}; \tag{2.166}$$

$$\int\limits_{0}^{2\pi}d\theta e^{i\theta(n-m)}=2\pi\delta_{mn}; \tag{2.167}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}d\rho\rho^{n+m+1}e^{-\rho^{2}}=\int\limits_{0}^{\infty}d\rho\rho^{2n+1}e^{-\rho^{2}}=\frac{1}{2}\Gamma(n+1)=\frac{n!}{2}; \tag{2.168}$$

$$< \psi_n \,|\, \psi_m >= \delta_{mn}. \tag{2.169}$$

Определим действие операторов $\hat{a}^+$, $\hat{a}$ в пространстве функций $\{f(a^*)\}$:

$$\hat{a}^+ f(a^*) = a^* f(a^*);\ \hat{a} f(a^*) = \frac{d}{da^*} f(a^*). \tag{2.170}$$

Действие операторов $\hat{a}^+$, $\hat{a}$ на базисные функции:

$$\hat{a}^+ \psi_n(a^*) = \frac{(a^*)^{n+1}}{\sqrt{n!}} = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(a^*); \tag{2.171}$$

$$\hat{a}\psi_n(a^*) = \frac{d}{da^*}\frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} = \frac{n(a^*)^{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt{(n-1)!}} = \sqrt{n}\psi_{n-1}(a^*).\ ] \tag{2.172}$$

Покажем, что операторы $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ сопряжены друг другу:

$$(f_1,\ \hat{a} f_2) = \int f_1^*(a^*)\hat{a} f_2(a^*)\exp(-a^* a)\frac{da^* da}{2\pi i} =$$

$$= \int f_1^*(a^*)\frac{d}{da^*} f_2(a^*)\exp(-a^* a)\frac{da^* da}{2\pi i} = -\int \frac{d}{da^*}\left[f_1^*(a^*)\exp(-a^* a)\right] f_2(a^*)\frac{da^* da}{2\pi i} =$$

$$= -\int \left[\frac{d}{da} f_1(a^*)\right]^* f_2(a^*)\exp(-a^* a)\frac{da^* da}{2\pi i} + \int a f_1^*(a^*) f_2(a^*)\exp(-a^* a)\frac{da^* da}{2\pi i} =$$

$$= \int \left[a^* f_1(a^*)\right]^* f_2(a^*)\exp(-a^* a)\frac{da^* da}{2\pi i} = (\hat{a}^+ f_1,\ f_2). \tag{2.173}$$

Определим теперь ядро произвольного оператора $\hat{A}$. (Это позволит нам позднее записать выражение для ядра S-матрицы).

Оператор $\hat{A}$ можно представить как интегральный оператор,

$$\hat{A} f(a^*) = \int A(a^*,\ \alpha) f(\alpha^*)\exp(-\alpha^*\alpha)\frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i}, \tag{2.174}$$

причем ядро $A(a^*,\ a)$ выражается через матричные элементы оператора $\hat{A}$ в базисе (2.159),

$$A(a^*,\ a) = \sum_{m,n} A_{mn}\frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}}\frac{a^m}{\sqrt{m!}}; \tag{2.175}$$

$$A_{mn} = < \psi_n \,|\, \hat{A} \,|\, \psi_m > . \tag{2.176}$$

В самом деле, рассмотрим действие оператора $\hat{A}$ на базисную функцию:

$$\hat{A}\psi_n(a^*) = \int \sum_{m,l} A_{ml}\frac{(a^*)^l}{\sqrt{l!}}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\exp(-\alpha^*\alpha)\frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i} =$$

$$= \sum_{m,l} A_{ml}\frac{(a^*)^l}{\sqrt{l!}}\delta_{mn} = \sum_l A_{nl}\frac{(a^*)^l}{\sqrt{l!}}. \tag{2.177}$$

Произведению операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ соответствует свертка ядер:

$$(\hat{A}\hat{B})(a^*,\ a) = \int A(a^*,\ \alpha)B(\alpha^*,\ a)\exp(-\alpha^*\alpha)\frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i}. \tag{2.178}$$

Действительно,

$$\hat{A}\hat{B}f(a^*) = \iint \sum_{l,n} A_{ln}\frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}}\frac{\beta^l}{\sqrt{l!}}\sum_{m,p} B_{mp}\frac{(\beta^*)^p}{\sqrt{p!}}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\times$$

$$\times\exp(-\beta^*\beta)f(\alpha^*)\exp(-\alpha^*\alpha)\frac{d\beta^* d\beta}{2\pi i}\frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i} =$$

$$= \int \sum_{l,m,n,p} A_{ln}B_{mp}\frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\delta_{lp}f(\alpha^*)\exp(-\alpha^*\alpha)\frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i} =$$

$$= \int \sum_{l,m,n} B_{ml}A_{ln}\frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}f(\alpha^*)\exp(-\alpha^*\alpha)\frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i}. \tag{2.179}$$

Оператор $\hat{A}$ можно представить в виде суммы по нормальным произведениям операторов $\hat{a}^+$, $\hat{a}$:

$$\hat{A} = \sum_{m,n} K_{mn}(\hat{a}^+)^n\hat{a}^m. \tag{2.180}$$

Такому оператору сопоставляется ядро

$$A(a^*,\ a) = \exp(a^*a)\sum_{m,n} K_{mn}(a^*)^n a^m. \tag{2.181}$$

Для проверки рассмотрим оператор

$$\hat{A} = (\hat{a}^+)^k\hat{a}^l. \tag{2.182}$$

В соответствие с (2.181) его ядро есть

$$A(a^*,\ a) = \exp(a^*a)(a^*)^k a^l. \tag{2.183}$$

С другой стороны,

$$< \psi_n\,|\,\hat{A}\,|\,\psi_m > = \int \frac{a^n}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^k\hat{a}^l\frac{(a^*)^m}{\sqrt{m!}}\exp(-a^*a)\frac{da^* da}{2\pi i} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!m!}}\int \left[\left(\frac{d}{da}\right)^k a^n\right]\left[\left(\frac{d}{da^*}\right)^l (a^*)^m\right]\exp(-a^*a)\frac{da^* da}{2\pi i} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)m(m-1)\ldots(m-l+1)}{\sqrt{n!m!}}\theta(n-k)\theta(m-l)\times$$

$$\times \int a^{n-k}(a^*)^{m-l}\exp(-a^*a)\frac{da^*da}{2\pi i} = \frac{n!m!\sqrt{(n-k)!(m-l)!}}{(n-k)!(m-l)!\sqrt{n!m!}}\theta(n-k)\theta(m-l)\delta_{n-k,m-l} =$$

$$= \sqrt{n(n-1)\dots(n-k+1)m(m-1)\dots(m-l+1)}\theta(n-k)\theta(m-l)\delta_{n-k,m-l}. \tag{2.184}$$

$$A(a^*,\ a) = \sum_{m,n} A_{mn}\frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}}\frac{a^m}{\sqrt{m!}} =$$

$$= \sum_{m,n}\sqrt{n(n-1)\dots(n-k+1)m(m-1)\dots(m-l+1)}\frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}}\frac{a^m}{\sqrt{m!}}\times$$

$$\times\theta(n-k)\theta(m-l)\delta_{n-k,m-l}. \tag{2.185}$$

Заменим индекс суммирования:

$$n-k=p;\ n=p+k; \tag{2.186}$$

$$m-l=r;\ m=r+l. \tag{2.187}$$

$$A(a^*,\ a) = \sum_{p,r}\sqrt{(p+k)(p+k-1)\dots(p+1)(r+l)(r+l-1)\dots(r+1)}\times$$

$$\times\frac{(a^*)^{p+k}}{\sqrt{(p+k)!}}\frac{a^{r+l}}{\sqrt{(r+l)!}}\theta(p)\theta(r)\delta_{pr} = \sum_{p>0}\frac{1}{p!}(a^*)^{p+k}a^{p+l} = (a^*)^k a^l\sum_{p>0}\frac{1}{p!}(a^*)^p a^p =$$

$$= (a^*)^k a^l\exp(a^*a), \tag{2.188}$$

что совпадает с (2.183).

Теперь мы можем сразу записать ядро оператора эволюции

$$\hat U = \exp\left[-i\hat H(\hat a^+,\ \hat a)\Delta t\right] \tag{2.189}$$

$$U(a^*,\ a,\ \Delta t) = \exp\left[a^*a - iH(a^*,\ a)\Delta t\right]. \tag{2.190}$$

Рассмотрим последовательно свертку двух, трех и т. д. ядер оператора эволюции:

$$U(a_2^*,\ a_0;\ 2\varepsilon) = \int U(a_2^*,\ a_1,\ \varepsilon)U(a_1^*,\ a_0,\ \varepsilon)\exp(-a_1^*a_1)\frac{da_1^*da_1}{2\pi i} =$$

$$= \int\exp\left[a_2^*a_1 - a_1^*a_1 + a_1^*a_0 - iH(a_2^*,\ a_1)\varepsilon - iH(a_1^*,\ a_0)\varepsilon\right]\frac{da_1^*da_1}{2\pi i}; \tag{2.191}$$

$$U(a_3^*,\ a_0;\ 3\varepsilon) = \iint U(a_3^*,\ a_2,\ \varepsilon)U(a_2^*,\ a_1,\ \varepsilon)U(a_1^*,\ a_0,\ \varepsilon)\times$$

$$\times\exp(-a_2^*a_2)\exp(-a_1^*a_1)\frac{da_2^*da_2}{2\pi i}\frac{da_1^*da_1}{2\pi i} = \iint\exp\left(a_3^*a_2 - a_2^*a_2 + a_2^*a_1 - a_1^*a_1 + a_1^*a_0 -\right.$$

$$\left.-i\left[H(a_3^*,\ a_2) + H(a_2^*,\ a_1) + H(a_1^*,\ a_0)\right]\varepsilon\right)\frac{da_2^*da_2}{2\pi i}\frac{da_1^*da_1}{2\pi i}; \tag{2.192}$$

Ясно, что переменные $a_0,\ a_1^*,\ a_1,\ a_2^*,\ a_2,\ a_3^*$ соответствуют последовательным моментам времени $t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3$. Для интервала

$$t'' - t' = N\varepsilon;\ \varepsilon = \Delta t \tag{2.193}$$

получим:

$$U(a^*,\ a;\ t''-t') = \iint \ldots \int \exp\left(a^* a_{N-1} - a_{N-1}^* a_{N-1} + \ldots + a_2^* a_1 - a_1^* a_1 + a_1^* a - \right.$$

$$\left. -i\left[H(a^*,\ a_{N-1}) + \ldots + H(a_2^*,\ a_1) + H(a_1^*,\ a)\right]\varepsilon\right) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{da_k^* da_k}{2\pi i}. \tag{2.194}$$

Здесь

$$a = a_0 - \text{соответствует моменту времени } t'; \tag{2.195}$$

$$a^* = a_N^* - \text{соответствует моменту времени } t''. \tag{2.196}$$

Предельный переход:

$$U(a^*,\ a;\ t''-t') = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \iint \ldots \int \exp\left(a^* a_{N-1} - \left[a_{N-1}^*(a_{N-1} - a_{N-2}) + \ldots + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a_1^*(a_1 - a)\right] - i\left[H(a^*,\ a_{N-1}) + \ldots + H(a_2^*,\ a_1)\ + H(a_1^*,\ a)\right]\varepsilon\right) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{da_k^* da_k}{2\pi i} =$$

$$= \int \exp\left[a^*(t'')a(t'')\right] \exp\left(\int_{t'}^{t''} \left[-a^*\dot{a} - iH(a^*,\ a)\right] dt\right) \prod_t \frac{da^*(t)da(t)}{2\pi i}, \tag{2.197}$$

или, после симметризации по $a^*,\ a$,

$$U(a^*,\ a;\ t''-t') = \int \exp\left(\frac{1}{2}\left[a^*(t'')a(t'') + a^*(t')a(t')\right] + \right.$$

$$\left. + i\int_{t'}^{t''} \left[\frac{1}{2i}(\dot{a}^* a - a^*\dot{a}) - H(a^*,\ a)\right] dt\right) \prod_t \frac{da^*(t)da(t)}{2\pi i}. \tag{2.198}$$

Интеграл (2.198) рассматривается при граничных условиях

$$a^*(t'') = a^*;\ a(t') = a. \tag{2.199}$$

Заметим, что в отличие от континуального интеграла в координатном представлении, граничные условия здесь накладываются на две независимые функции: $a^*(t)$ и $a(t)$. В момент времени t'' значение $a^*(t'')$ фиксировано, $a(t'')$ является переменной интегрирования, а в момент времени t', наоборот, $a(t')$ фиксировано, $a^*(t')$ является переменной интегрирования.

В показателе экспоненты в (2.198) стоит квадратичная по переменным a^*, a функция. Этот интеграл можно вычислить явно, выполняя гауссовы квадратуры. Мы рассмотрим допредельное выражение для интеграла (2.198). Начнем с интеграла (2.191):

$$U(a^*,\ a;\ 2\varepsilon)=\int U(a^*,\ \alpha,\ \varepsilon)U(\alpha^*,\ a,\ \varepsilon)\exp(-\alpha^*\alpha)\frac{d\alpha^*d\alpha}{2\pi i}=$$

$$=\int\exp\left(a^*\alpha-\alpha^*\alpha+\alpha^*a-i\omega\varepsilon a^*\alpha-i\omega\varepsilon\alpha^*a\right)\frac{d\alpha^*d\alpha}{2\pi i}=$$

$$=\int\exp\left[a^*\alpha(1-i\omega\varepsilon)-\alpha^*\alpha+\alpha^*a(1-i\omega\varepsilon)\right]\frac{d\alpha^*d\alpha}{2\pi i}. \qquad (2.200)$$

Так же, как и в случае координатного представления, этот интеграл вычисляется с помощью подстановки

$$\alpha^*=\bar{\alpha}^*+\beta^*;\ \alpha=\bar{\alpha}+\beta, \qquad (2.201)$$

где $(\bar{\alpha}^*,\ \bar{\alpha})$ – точка, в которой квадратичная форма, стоящая в показателе экспоненты имеет экстремум:

$$\bar{\alpha}^*=a^*(1-i\omega\varepsilon);\ \bar{\alpha}=a(1-i\omega\varepsilon). \qquad (2.202)$$

В показателе экспоненты после подстановки (2.201) мы получим выражение:

$$a^*a(1-i\omega\varepsilon)^2+a^*\beta(1-i\omega\varepsilon)-a^*a(1-i\omega\varepsilon)^2-$$

$$-a^*\beta(1-i\omega\varepsilon)-\beta^*a(1-i\omega\varepsilon)-\beta^*\beta+a^*a(1-i\omega\varepsilon)^2+$$

$$+\beta^*a(1-i\omega\varepsilon)=a^*a(1-i\omega\varepsilon)^2-\beta^*\beta. \qquad (2.203)$$

В результате имеем:

$$U(a^*,\ a;\ 2\varepsilon)=\exp\left[a^*a(1-i\omega\varepsilon)^2\right]\int\exp(-\beta^*\beta)\frac{d\beta^*d\beta}{2\pi i}=\exp\left[a^*a(1-i\omega\varepsilon)^2\right]. \qquad (2.204)$$

Таким же образом для интеграла (2.192) можно показать, что

$$U(a^*,\ a;\ 3\varepsilon)=\int U(a^*,\ \alpha,\ \varepsilon)U(\alpha^*,\ a,\ 2\varepsilon)\exp(-\alpha^*\alpha)\frac{d\alpha^*d\alpha}{2\pi i}=$$

$$=\int\exp\left[a^*\alpha(1-i\omega\varepsilon)-\alpha^*\alpha+\alpha^*a(1-i\omega\varepsilon)^2\right]\frac{d\alpha^*d\alpha}{2\pi i}=\exp\left[a^*a(1-i\omega\varepsilon)^3\right]. \qquad (2.205)$$

И вообще,

$$U(a^*,\ a;\ N\varepsilon)=\exp\left[a^*a(1-i\omega\varepsilon)^N\right]. \qquad (2.206)$$

$$U(a^*,\ a;\ t''-t')=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\exp\left[a^*a(1-i\omega\varepsilon)^N\right]; \qquad (2.207)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to \infty}} (1 - i\omega\varepsilon)^N = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to \infty}} \exp\left[N \ln(1 - i\omega\varepsilon)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left[\frac{t'' - t'}{\varepsilon} \ln(1 - i\omega\varepsilon)\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left[\frac{-i\omega(t'' - t')}{1 - i\omega\varepsilon}\right] = \exp\left[-i\omega(t'' - t')\right]; \tag{2.208}$$

$$U(a^*,\ a;\ t'' - t') = \exp\left(a^* a \exp\left[-i\omega(t'' - t')\right]\right). \tag{2.209}$$

Тот же результат можно получить и непосредственно из (2.198), учитывая, что выражение в показателе экспоненты достигает экстремума на уравнениях движения

$$\dot{a}^* = i\omega a^*;\ \dot{a} = -i\omega a, \tag{2.210}$$

которые получаются при варьировании действия

$$S = \int\limits_{t'}^{t"} \left[\frac{1}{2i}(\dot{a}^* a - a^* \dot{a}) - \omega a^* a\right] dt. \tag{2.211}$$

Интеграл (2.211) обращается в 0 на уравнениях движения, так что в показателе экспоненты в (2.198) остается только граничный член. Подставляя в (2.198) решения уравнений движения (2.210) при граничных условиях (2.199),

$$a^*(t) = a^* \exp\left[i\omega(t - t'')\right]; \tag{2.212}$$

$$a(t) = a \exp\left[-i\omega(t - t')\right], \tag{2.213}$$

снова получаем выражение (2.209). Здесь использовалось свойство гауссова интеграла, согласно которому он равен подынтегральному выражению, вычисленному в точке экстремума показателя экспоненты.

Используя выражение (2.209), покажем, что если $A(a^*,\ a)$ – ядро оператора $\hat{A}$, то оператор

$$\exp\left(i\hat{H}t''\right) \hat{A} \exp\left(-i\hat{H}t'\right) \tag{2.214}$$

имеет ядро

$$A\left(a^* \exp(i\omega t''),\ a \exp(-i\omega t')\right). \tag{2.215}$$

Это свойство понадобится нам в следующем разделе при выводе выражения для ядра S-матрицы. Поскольку, как утверждалось ранее, оператор $\hat{A}$ можно представить в виде суммы по нормальным произведениям операторов $\hat{a}^+$, $\hat{a}$,

$$\hat{A} = \sum_{m,n} K_{mn} (\hat{a}^+)^n \hat{a}^m, \tag{2.216}$$

достаточно рассмотреть оператор

$$\hat{A} = (\hat{a}^+)^k \hat{a}^l. \tag{2.217}$$

Рассмотрим свертку ядер

$$\iint U(a^*,\ \alpha;\ -t'')\exp(\alpha^*\beta)(\alpha^*)^k\beta^l U(\beta^*,\ a;\ t')\,\exp(-\alpha^*\alpha)\exp(-\beta^*\beta)\frac{d\beta^*d\beta}{2\pi i}\frac{d\alpha^*d\alpha}{2\pi i}=$$

$$=\iint\exp\left(a^*\alpha e^{i\omega t''}\right)\exp(\alpha^*\beta)(\alpha^*)^k\beta^l\exp\left(\beta^*ae^{-i\omega t'}\right)\times$$

$$\times\exp(-\alpha^*\alpha)\exp(-\beta^*\beta)\frac{d\beta^*d\beta}{2\pi i}\frac{d\alpha^*d\alpha}{2\pi i}=$$

$$=\iint\sum_{m,n,p}\frac{1}{m!n!p!}(a^*)^m\alpha^m e^{im\omega t''}(\alpha^*)^n\beta^n(\alpha^*)^k\beta^l\times$$

$$\times(\beta^*)^pa^pe^{-ip\omega t'}\exp(-\alpha^*\alpha)\exp(-\beta^*\beta)\frac{d\beta^*d\beta}{2\pi i}\frac{d\alpha^*d\alpha}{2\pi i}=$$

$$=\sum_{m,n,p}\frac{1}{m!n!p!}(a^*)^ma^pe^{im\omega t''}e^{-ip\omega t'}\times$$

$$\times\iint(\alpha^*)^{n+k}\alpha^m(\beta^*)^p\beta^{n+l}\exp(-\alpha^*\alpha)\exp(-\beta^*\beta)\frac{d\beta^*d\beta}{2\pi i}\frac{d\alpha^*d\alpha}{2\pi i}=$$

$$=\sum_{m,n,p}\frac{1}{m!n!p!}(a^*)^ma^pe^{im\omega t''}e^{-ip\omega t'}m!\delta_{m,n+k}p!\delta_{p,n+l}=$$

$$=\sum_n\frac{1}{n!}(a^*)^{n+k}a^{n+l}e^{i(n+k)\omega t''}e^{-i(n+l)\omega t'}=$$

$$=\left(a^*e^{i\omega t''}\right)^k\left(ae^{-i\omega t'}\right)^l\sum_n\frac{1}{n!}\left(a^*ae^{i\omega t''}e^{-i\omega t'}\right)^n=$$

$$=\left(a^*e^{i\omega t''}\right)^k\left(ae^{-i\omega t'}\right)^l\exp\left(a^*ae^{i\omega t''}e^{-i\omega t'}\right)=A\left(a^*e^{i\omega t''},\ ae^{-i\omega t'}\right).\tag{2.218}$$

Утверждение доказано.

2.10. Континуальный интеграл в голоморфном представлении. Скалярное поле. Выражение для ядра S-матрицы

В голоморфном представлении скалярное поле выражается через комплексные амплитуды $a^*(\vec{k})$, $a(\vec{k})$:

$$\phi(\vec{x},\ t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left[a^*(\vec{k},\ t)\exp(-i\vec{k}\vec{x})+a(\vec{k},\ t)\exp(i\vec{k}\vec{x})\right]d^3k.\tag{2.219}$$

Свободный гамильтониан поля есть

$$H_0 = \int \omega(\vec{k}) a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) d^3k. \tag{2.220}$$

Полный гамильтониан

$$H = H_0\left(a^*(\vec{k}),\ a(\vec{k})\right) + V\left(a^*(\vec{k}),\ a(\vec{k})\right); \tag{2.221}$$

$$V\left(a^*(\vec{k}),\ a(\vec{k})\right) = \int V\left(\phi(\vec{x},\ t)\right) d^3x. \tag{2.222}$$

Пусть $V(\phi)$ описывает взаимодействие с внешним источником,

$$V(\phi) = J(x)\phi(x); \tag{2.223}$$

$$J(\vec{x},\ t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int \sqrt{2\omega}\gamma(\vec{k},\ t) \exp(i\vec{k}\vec{x}) d^3k; \tag{2.224}$$

$$\gamma(\vec{k},\ t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega}} J(\vec{x},\ t) \exp(-i\vec{k}\vec{x}) d^3x; \tag{2.225}$$

$$\int V(\phi) d^3x = \int \left[a^*(\vec{k},\ t)\gamma(\vec{k},\ t) + \gamma^*(\vec{k},\ t) a(\vec{k},\ t)\right] d^3k. \tag{2.226}$$

Мы можем сразу выписать выражение для ядра оператора эволюции

$$\begin{gathered} U(a^*(\vec{k}),\ a(\vec{k});\ t'' - t') = \\ = \int \exp\left(\int d^3k \frac{1}{2}\left[a^*(\vec{k},\ t'')a(\vec{k},\ t'') + a^*(\vec{k},\ t')a(\vec{k},\ t')\right] + \right. \\ +i\int\limits_{t'}^{t''} dt \int d^3k \left[\frac{1}{2i}\left(\dot{a}^*(\vec{k},\ t)a(\vec{k},\ t) - a^*(\vec{k},\ t)\dot{a}(\vec{k},\ t)\right) - \right. \\ \left.\left. -\omega(\vec{k})a^*(\vec{k},\ t)a(\vec{k},\ t) - a^*(\vec{k},\ t)\gamma(\vec{k},\ t) - \gamma^*(\vec{k},\ t)a(\vec{k},\ t)\right]\right) \times \\ \times \prod_{\vec{k},t} \frac{da^*(\vec{k},\ t) da(\vec{k},\ t)}{2\pi i}, \end{gathered} \tag{2.227}$$

причем

$$a^*(\vec{k},\ t'') = a^*(\vec{k});\ a(\vec{k},\ t') = a(\vec{k}). \tag{2.228}$$

Вспомним, что $\hat{S}$-оператор определяется формулой

$$\hat{S} = \lim_{\substack{t'' \to +\infty \\ t' \to -\infty}} \exp\left(i\hat{H}_0 t''\right) \exp\left(-i\hat{H}(t'' - t')\right) \exp\left(-i\hat{H}_0 t'\right). \tag{2.229}$$

Используя доказанное в предыдущем разделе утверждение, мы можем сразу написать выражение для ядра S-матрицы:

$$S\left(a^*(\vec{k}),\ a(\vec{k})\right) = \lim_{\substack{t" \to +\infty \\ t' \to -\infty}} U\left(a^*(\vec{k})e^{i\omega t''},\ a(\vec{k})e^{-i\omega t'}\right). \tag{2.230}$$

Интеграл в (2.227) мы теперь должны рассматривать при граничных условиях

$$a^*(\vec{k},\ t'') = a^*(\vec{k})e^{i\omega t''};\ a(\vec{k},\ t') = a(\vec{k})e^{-i\omega t'}. \tag{2.231}$$

В отличие от формулы (2.227), здесь используются другие граничные условия ((231) вместо (2.228)), и берутся пределы $t'' \to +\infty$, $t' \to -\infty$.

Преобразуем полученную формулу для ядра S-матрицы, оценив выражение в показателе экспоненты в (2.227) в точке экстремума. Для этого в (2.230), (2.227) необходимо подставить решения уравнений движения

$$\dot{a}^*(\vec{k},\ t) - i\omega(\vec{k})a^*(\vec{k},\ t) - i\gamma^*(\vec{k},\ t) = 0; \tag{2.232}$$

$$\dot{a}(\vec{k},\ t) + i\omega(\vec{k})a(\vec{k},\ t) + i\gamma(\vec{k},\ t) = 0. \tag{2.233}$$

Решение этих неоднородных уравнений легко находится методом вариации постоянной:

$$a^*(\vec{k},\ t) = C^*(\vec{k},\ t)e^{i\omega t}; \tag{2.234}$$

$$\dot{C}^*(\vec{k},\ t)e^{i\omega t} - i\gamma^*(\vec{k},\ t) = 0; \tag{2.235}$$

$$C^*(\vec{k},\ t) = i\int \gamma^*(\vec{k},\ t)e^{-i\omega t}dt; \tag{2.236}$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям (2.231):

$$a^*(\vec{k},\ t) = a^*(\vec{k})e^{i\omega t} - ie^{i\omega t}\int\limits_t^{t"} \gamma^*(\vec{k},\ \tau)e^{-i\omega\tau}d\tau, \tag{2.237}$$

аналогично,

$$a(\vec{k},\ t) = a(\vec{k})e^{-i\omega t} - ie^{-i\omega t}\int\limits_{t'}^{t} \gamma(\vec{k},\ \tau)e^{i\omega\tau}d\tau. \tag{2.238}$$

Подставим (2.237), (2.238) в (2.227). "Граничный" член в показателе экспоненты дает:

$$\int d^3k\frac{1}{2}\left[a^*(\vec{k},\ t'')a(\vec{k},\ t'') + a^*(\vec{k},\ t')a(\vec{k},\ t')\right] =$$

$$= \int d^3k\left[a^*(\vec{k})a(\vec{k}) - \frac{i}{2}a^*(\vec{k})\int\limits_{t'}^{t"} \gamma(\vec{k},\ t)e^{i\omega t}dt - \frac{i}{2}a(\vec{k})\int\limits_{t'}^{t"} \gamma^*(\vec{k},\ t)e^{-i\omega t}dt\right] =$$

$$= \int d^3k a^*(\vec{k})a(\vec{k}) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_{t'}^{t"} dt \int d^3x J(\vec{x},\ t) \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \Big[a^*(\vec{k})e^{ikx} +$$

$$+ a(\vec{k})e^{-ikx}\Big] = \int d^3k a^*(\vec{k})a(\vec{k}) - \frac{i}{2}\int\limits_{t'}^{t"} dt \int d^3x J(\vec{x},\ t)\phi_0(\vec{x},\ t). \qquad (2.239)$$

Здесь ϕ_0 – свободное скалярное поле. Подставим (2.237), (2.238) в интеграл действия, принимая во внимание формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{t}^{t"} \gamma^*(\vec{k},\ \tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = -\gamma^*(\vec{k},\ t)e^{-i\omega t}; \qquad (2.240)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{t'}^{t} \gamma(\vec{k},\ \tau)e^{i\omega\tau}d\tau = \gamma(\vec{k},\ t)e^{i\omega t}. \qquad (2.241)$$

После довольно длинных вычислений получим:

$$i\int\limits_{t'}^{t"} dt \int d^3k \left[\frac{1}{2i}\left(\dot{a}^*(\vec{k},\ t)a(\vec{k},\ t) - a^*(\vec{k},\ t)\dot{a}(\vec{k},\ t)\right) -\right.$$

$$\left. -\omega(\vec{k})a^*(\vec{k},\ t)a(\vec{k},\ t) - a^*(\vec{k},\ t)\gamma(\vec{k},\ t) - \gamma^*(\vec{k},\ t)a(\vec{k},\ t)\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_{t'}^{t"} dt \int d^3x J(\vec{x},\ t) \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[a(\vec{k})e^{-ikx} + a^*(\vec{k})e^{ikx}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{t'}^{t"} dt \int\limits_{t'}^{t} d\tau \int d^3x \int d^3y J(\vec{x},\ t) \int d^3k \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}\vec{x}} J(\vec{y},\ \tau) e^{i\omega\tau} e^{-i\vec{k}\vec{y}} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{t'}^{t"} dt \int\limits_{t}^{t"} d\tau \int d^3x \int d^3y J(\vec{x},\ t) \int d^3k \frac{1}{2\omega} e^{i\omega t} e^{-i\vec{k}\vec{x}} J(\vec{y},\ \tau) e^{-i\omega\tau} e^{i\vec{k}\vec{y}} =$$

$$= -\frac{i}{2}\int\limits_{t'}^{t"} dt \int d^3x J(\vec{x},\ t)\phi_0(\vec{x},\ t) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{t'}^{t"} dt \int\limits_{t'}^{t"} d\tau \int d^3x \int d^3y J(\vec{x},\ t) \int d^3k \frac{1}{2\omega} \times$$

$$\times \exp\left[-i\omega\,|\,t-\tau\,|\,\right] \exp\left[i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})\right] J(\vec{y},\ \tau). \qquad (2.242)$$

Вспомним, что причинная функция Грина может быть представлена в виде

$$G_0^{(c)}(x) = i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \frac{1}{2\omega} \exp\left(-i\omega\,|\,t\,|\,\right) \exp\left(i\vec{k}\vec{x}\right). \qquad (2.243)$$

Действительно, функция Грина

$$G_0^{(c)}(x) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{2.244}$$

имеет полюса в точках

$$\omega_1 = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\varepsilon; \tag{2.245}$$

$$\omega_2 = -\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + i\varepsilon. \tag{2.246}$$

При $t > 0$ контур замыкается в нижней полуплоскости; вычет берется в точке ω_1. Поэтому

$$\begin{aligned} G_0^{(c)}(x) &= -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 (-2\pi i) \int d^3k \operatorname*{Res}_{\omega_1} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = \\ &= i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \frac{e^{-ikx}}{\omega + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}}\Bigg|_{\omega=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} = \\ &= i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega}\Bigg|_{\omega=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} e^{i\vec{k}\vec{x}},\ t > 0. \end{aligned} \tag{2.247}$$

Аналогично, при $t < 0$ контур замыкается в верхней полуплоскости; вычет берется в точке ω_2.

$$\begin{aligned} G_0^{(c)}(x) &= -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 2\pi i \int d^3k \operatorname*{Res}_{\omega_2} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = \\ &= i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \frac{e^{i\omega t}}{2\omega}\Bigg|_{\omega=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} e^{i\vec{k}\vec{x}},\ t < 0. \end{aligned} \tag{2.248}$$

Из (2.247) и (2.248) следует (2.243). Поэтому (2.242) можно переписать в виде

$$-\frac{i}{2}\int\limits_{t'}^{t''} dt \int d^3x J(\vec{x},\ t)\phi_0(\vec{x},\ t) + \frac{i}{2}\int\limits_{t'}^{t''} dt \int\limits_{t'}^{t''} d\tau \int d^3x \int d^3y J(\vec{x},\ t) G_0^{(c)}(x-y) J(\vec{y},\ \tau). \tag{2.249}$$

Таким образом, выбор граничных условий (2.231) привел к появлению причинной функции Грина в выражении для S-матрицы. Объединяя (2.239) и (2.249) и переходя к пределам, получим следующее выражение для ядра S-матрицы:

$$\begin{aligned} S\left(a^*(\vec{k}),\ a(\vec{k})\right) = \lim_{\substack{t'' \to +\infty \\ t' \to -\infty}} \exp\Bigg(\int d^3k a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) - i\int\limits_{t'}^{t''} dt \int d^3x J(\vec{x},\ t)\phi_0(\vec{x},\ t) + \\ + \frac{i}{2}\int\limits_{t'}^{t''} dt \int\limits_{t'}^{t''} d\tau \int d^3x \int d^3y J(\vec{x},\ t) G_0^{(c)}(x-y) J(\vec{y},\ \tau)\Bigg) = \end{aligned}$$

$$= \exp\left(\int d^3k a^*(\vec{k})a(\vec{k}) - i\int\limits_{\infty}^{\infty} dt \int d^3x J(\vec{x},\, t)\phi_0(\vec{x},\, t) + \right.$$
$$\left. +\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x \int d^3y J(\vec{x},\, t) G_0^{(c)}(x-y) J(\vec{y},\, \tau)\right). \tag{2.250}$$

Рассмотрим случай произвольного потенциала $V(\phi)$. Как уже объяснялось ранее, мы можем представить

$$\exp\left(i\int d^4xV(\phi)\right) = \exp\left[i\int d^4xV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]\exp\left(i\int d^4xJ\phi\right)\Bigg|_{J(x)=0}. \tag{2.251}$$

Заменив $\exp\left(i\int d^4xV(\phi)\right)$ под знаком континуального интеграла в соответствии с выражением (2.251), мы можем вынести оператор $\exp\left[i\int d^4xV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]$ из-под континуального интеграла. Оператор будет действовать на интеграл, который дает ядро S-матрицы для случая, который мы уже рассматривали – скалярное поле с источником. Следовательно, для произвольного потенциала формулу для ядра S-матрицы можно записать в виде:

$$S\left(a^*(\vec{k}),\, a(\vec{k})\right) = \exp\left[\int d^3ka^*(\vec{k})a(\vec{k})\right]\exp\left[i\int d^4xV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]\times$$
$$\times\exp\left[-i\int d^4x'J(x')\phi_0(x') + \frac{i}{2}\int d^4x'\int d^4y'J(x')G_0^{(c)}(x'-y')J(y')\right]\Bigg|_{J(x)=0}. \tag{2.252}$$

Разложение по теории возмущений:

$$S\left(a^*(\vec{k}),\, a(\vec{k})\right) = \exp\left[\int d^3ka^*(\vec{k})a(\vec{k})\right]\left[1 + i\int d^4xV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right) - \right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4yV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)V\left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right) + \ldots\right]\exp\left[-i\int d^4xJ(x')\phi_0(x') + \right.$$
$$\left. +\frac{i}{2}\int d^4x'\int d^4y'J(x')G_0^{(c)}(x'-y')J(y')\right]\Bigg|_{J(x)=0}. \tag{2.253}$$

2.11. Производящий функционал для S-матрицы и его связь с производящим функционалом для функций Грина

Поскольку $\exp\left[\int d^3ka^*(\vec{k})a(\vec{k})\right]$ не дает вклада в недиагональные элементы S-матрицы, эту экспоненту в дальнейшем можно опускать. Выражение для ядра S-матрицы можно представить следующим образом

$$S = \exp\left[i\int d^4xV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]\exp\left[-i\int d^4xJ(\vec{x},\, t)\phi_0(\vec{x},\, t)\right]Z_0[J]\Bigg|_{J(x)=0}. \tag{2.254}$$

Это выражение можно представить в виде континуального интеграла, который задает амплитуду перехода между двумя полевыми конфигурациями, соответствующими моментам времени $t = \pm\infty$. Действительно,

$$Z_0[J] = \int \prod_x d\phi(x) \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi + J\phi\right)\right] \times$$
$$\times \left(\int \prod_x d\phi(x) \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi\right)\right]\right)^{-1}. \tag{2.255}$$

Тогда

$$S = \exp\left[i \int d^4x V\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] \int \prod_x d\phi(x) \exp\left(i \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi + J(\phi - \phi_0)\right]\right) \times$$
$$\times \left(\int \prod_x d\phi(x) \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi\right)\right]\right)^{-1}. \tag{2.256}$$

В интеграле в (2.256) сделаем замену переменной

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - \phi_0(x), \tag{2.257}$$

и, учитывая, что $\phi_0(x)$ – решение свободного уравнения Клейна – Гордона, $\hat{K}\phi_0(x) = 0$, (2.257) перепишется в виде

$$S = \exp\left[i \int d^4x V\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] \int \prod_x d\tilde{\phi}(x) \exp\left(i \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\tilde{\phi}\hat{K}\tilde{\phi} + J\tilde{\phi}\right]\right) \times$$
$$\times \left(\int \prod_x d\phi(x) \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi\right)\right]\right)^{-1} =$$
$$= \int \prod_x d\phi(x) \exp\left(i \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi + V(\phi) + J\phi\right]\right) \times$$
$$\times \left(\int \prod_x d\phi(x) \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi\right)\right]\right)^{-1}. \tag{2.258}$$

Континуальный интеграл в числителе в (2.258) дает амплитуду перехода между двумя полевыми конфигурациями, соответствующим моментам времени $t = \pm\infty$. Знаменатель представляет собой нормировочный множитель, который позволяет сократить вклад вакуумных диаграмм. Формула (2.258) является аналогом формулы (1.179) главы 1, которая дает выражение через континуальный интеграл амплитуды перехода частицы $\varphi(x(-\infty), x(+\infty))$ из состояния $|\psi_{in}>$, соответствующему $t = -\infty$, в состояние $|\psi_{out}>$, соответствующее $t = +\infty$.

Заметим, что с формальной точки зрения мы можем рассматривать выражение (2.254) как функционал свободного поля ϕ_0 (производящий функционал для коэффициентных функций S-матрицы). При $J(x) \neq 0$ имеем функционал:

$$S[\phi_0,\ J] = \exp\left[i\int d^4xV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]\exp\left(-i\int d^4xJ\phi_0\right)Z_0[J]. \tag{2.259}$$

При $\phi_0(x)=0$ этот функционал совпадает с производящим функционалом для функций Грина:

$$S[0,\ J] = \exp\left[i\int d^4xV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]Z_0[J] = Z[J]. \tag{2.260}$$

Функционал $S[\phi_0, 0]$ разложим в ряд по ϕ_0:

$$S[\phi_0] \equiv S[\phi_0,\ 0] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\iint\ldots\int d^4x_1\ldots d^4x_n\phi_0(x_1)\ldots\phi_0(x_n)\times$$

$$\times P_n(x_1,\ \ldots,\ x_n); \tag{2.261}$$

$$P_n(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \left.\frac{\delta^n S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x_1)\ldots\delta\phi_0(x_n)}\right|_{\phi_0(x)=0}. \tag{2.262}$$

Используя формулы (2.254), (2.260), мы можем установить связь между коэффициентными функциями $P_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ S-матрицы и функциями Грина. Беря вариационные производные по ϕ_0 от (2.254) и положив $\phi_0 = 0$, получим:

$$\frac{\delta^n}{\delta\phi_0(x_1)\ldots\delta\phi_0(x_n)}\left(\exp\left[i\int d^4xV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\left.\times\exp\left(-i\int d^4xJ\phi_0\right)Z_0[J]\right)\right|_{\substack{J(x)=0\\ \phi_0(x)=0}} = (-i)^nJ(x_1)\ldots J(x_n)\times$$

$$\times\exp\left[i\int d^4xV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]Z_0[J]\Big|_{J(x)=0}. \tag{2.263}$$

Теперь подействуем на функционал $Z[J]$ оператором

$$-\int d^4z\hat{K}^{(c)}(x_i - z)\frac{\delta}{\delta J(z)}, \tag{2.264}$$

где

$$\hat{K}^{(c)}(x_i - z) = \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2 - i\varepsilon\right)\delta(x_i - z). \tag{2.265}$$

Получим

$$-\int d^4z\hat{K}^{(c)}(x_i - z)\frac{\delta Z[J]}{\delta J(z)} = -\exp\left[i\int d^4xV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]\int d^4z\hat{K}^{(c)}(x_i - z)\times$$

$$\times\frac{\delta}{\delta J(z)}\exp\left(\frac{i}{2}\iint d^4xd^4yJ(x)G_0^{(c)}(x-y)J(y)\right) = -i\exp\left[i\int d^4xV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]\times$$

$$\times \int d^4 z \hat{K}^{(c)}(x_i - z) \int d^4 y G_0^{(c)}(z-y) J(y) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{i}{2} \iint d^4 x d^4 y J(x) G_0^{(c)}(x-y) J(y)\right) =$$

$$= -iJ(x_i) \exp\left[i \int d^4 x V\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] Z_0[J]. \tag{2.266}$$

В результате n-кратного действия оператора (2.264), полагая $J = 0$, получится

$$(-1)^n \iint \ldots \int d^4 z_1 \ldots d^4 z_n \prod_{i=1}^{n} \hat{K}^{(c)}(x_i - z_i) \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(z_1) \ldots \delta J(z_n)}\right|_{J(x)=0} =$$

$$= (-i)^n J(x_1) \ldots J(x_n) \exp\left[-i \int d^4 x V\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right] Z_0[J]\Big|_{J(x)=0}. \tag{2.267}$$

Из (2.263), (2.267) следует:

$$P_n(x_1,\, \ldots,\, x_n) = \left.\frac{\delta^n S[\phi_0]}{\delta\phi_0(x_1) \ldots \delta\phi_0(x_n)}\right|_{\phi_0(x)=0} =$$

$$= (-i)^n \iint \ldots \int d^4 z_1 \ldots d^4 z_n \prod_{i=1}^{n} \hat{K}^{(c)}(x_i - z_i) G(z_1,\, \ldots,\, z_n) \tag{2.268}$$

Мы получили искомую связь между функциями $P_n(x_1, \ldots, x_n)$ и функциями Грина (так называемая редукционная формула).

Что представляют собой функции $P_n(x_1,\, \ldots,\, x_n)$? В рамках операторного формализма можно получить следующее выражение для S-матрицы:

$$\hat{S}(+\infty,\, -\infty) = T\left[\exp\left(i \int d^4 x V(\hat{\phi})\right)\right]. \tag{2.269}$$

(Напомним, что поля ϕ в этом подходе считаются операторными функциями). Члены разложения S-матрицы в ряд теории возмущений

$$\hat{S}_n(x_1,\, \ldots,\, x_n) = i^n T\left[V\left(\hat{\phi}(x_1)\right),\, \ldots,\, V\left(\hat{\phi}(x_n)\right)\right] \tag{2.270}$$

представляют собой хронологические произведения полевых операторов. Согласно второй теореме Вика, хронологическое произведение полевых операторов равно сумме их нормальных произведений со всеми возможными хронологическими спариваниями. (Хронологическое спаривание представляет собой двухточечную свободную функцию Грина, т. е. фейнмановский пропагатор).

Так, для теории ϕ^4:

$$\hat{S}_n(x_1,\, \ldots,\, x_n) = i^n \left(-\frac{g}{4!}\right)^n \left[:\hat{\phi}^4(x_1) \ldots \hat{\phi}^4(x_n): -\right.$$

$$-i \sum_{i \neq j} : \hat{\phi}^4(x_1) \ldots \hat{\phi}^3(x_i) \ldots \hat{\phi}^3(x_j) \ldots \hat{\phi}^4(x_n) : \; G_0^{(c)}(x_i - x_j) + \ldots \qquad (2.271)$$

Каждому члену в (2.271) можно сопоставить диаграмму n-го порядка, причем число внешних линий в каждой диаграмме равно числу неспаренных полевых операторов, входящих в нормальное произведение (для теории $\phi^4 - 4n, \ldots 4, 2, 0$; 0 соответствует вакуумной диаграмме без внешних линий). Таким образом, процессу, в котором участвует определенное число частиц в начальном и конечном состоянии, в каждом порядке теории возмущений соответствует одна диаграмма. Суммируя диаграммы, соответствующие определенному числу частиц в начальном и конечном состоянии, мы получим выражение для n-частичного элемента S-матрицы. При этом мы получим разложение типа (2.261). Можно показать, что n-частичный матричный элемент есть матричный элемент оператора

$$\iint \ldots \int dx_1 \ldots dx_n \hat{\phi}(x_1) \ldots \hat{\phi}(x_2) P_n(x_1, \ldots, x_n) \qquad (2.272)$$

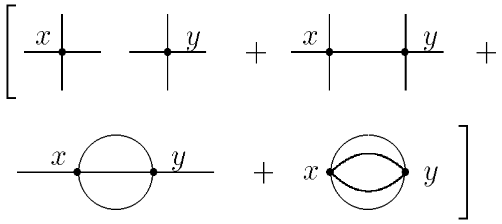
где $P_n(x_1, \ldots, x_n)$ дается формулой (2.268).

В качестве иллюстрации обсудим член второго порядка разложения S-матрицы по теории возмущений.

$$\hat{S}_2(x, y) = -\left(\frac{g}{4!}\right)^2 \Big[: \hat{\phi}^4(x) \hat{\phi}^4(y) : \; -16 : \hat{\phi}^3(x) \hat{\phi}^3(y) : \; iG_0^{(c)}(x - y) +$$
$$+72 : \hat{\phi}^2(x) \hat{\phi}^2(y) : \; \left(-iG_0^{(c)}(x - y)\right)^2 + 96 : \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) : \; \left(-iG_0^{(c)}(x - y)\right)^3 +$$
$$+24 \left(-iG_0^{(c)}(x - y)\right)^4 \Big]. \qquad (2.273)$$

Первое слагаемое соответствует несвязной диаграмме второго порядка, последнее – вакуумной диаграмме.

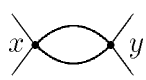
$$\hat{S}_2(x, y) = -\left(\frac{g}{4!}\right)^2$$



(2.274)

Для определенности рассмотрим третий член в (2.273),

$$: \hat{\phi}^2(x) \hat{\phi}^2(y) : \; \left(-iG_0^{(c)}(x - y)\right)^2$$



(2.275)

Он дает вклад в четырехчастичный элемент S-матрицы (две частицы находятся в начальном и две в конечном состоянии). Согласно операторной формулировке квантовой теории поля, для того, чтобы вычислить матричный элемент

$$< 0 \,|\, \hat{a}(\vec{p}_1) \hat{a}(\vec{p}_2) \int d^4x \int d^4y : \hat{\phi}^2(x) \hat{\phi}^2(y) : \; \left(-iG_0^{(c)}(x - y)\right)^2 \hat{a}^+(\vec{p}_3) \hat{a}^+(\vec{p}_4) \,|\, 0 > \qquad (2.276)$$

мы должны представить полевые операторы $\hat{\phi}$ как разложения по $\hat{a}^+(\vec{k})$, $\hat{a}(\vec{k})$:

$$\hat{\phi}(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[\hat{a}^+(\vec{k})e^{ikx} + \hat{a}(\vec{k})e^{-ikx}\right] \tag{2.277}$$

и коммутировать операторы $\hat{a}^+(\vec{k})$, $\hat{a}(\vec{k})$ из этих разложений с операторами $\hat{a}^+(\vec{p})$, $\hat{a}(\vec{p})$, которые входят в определение начального и конечного векторов состояний. После интегрирования по d^4xd^4y мы получим матричный элемент в импульсном представлении, который является фурье-образом произведения причинных функций Грина $\Big(-iG_0^{(c)}(x-y)\Big)^2$.

В подходе, основанном на методе континуального интегрирования, для вычисления того же матричного элемента мы должны рассмотреть интеграл

$$\begin{gathered}\int a(\vec{p}_1)a(\vec{p}_2)\exp\left(-\int d^3k a^*(\vec{k})a(\vec{k})\right) S\left(a^*(\vec{k}),\ \alpha(\vec{k})\right) \times \\ \times \exp\left(-\int d^3k \alpha^*(\vec{k})\alpha(\vec{k})\right) \alpha^*(\vec{p}_3)\alpha^*(\vec{p}_4)\times \\ \times \prod_{\vec{k}} \frac{da^*(\vec{k})da(\vec{k})}{2\pi i}\frac{d\alpha^*(\vec{k})d\alpha(\vec{k})}{2\pi i}.\end{gathered} \tag{2.278}$$

В формуле (2.252) для $S\left(a^*(\vec{k}),\ \alpha(\vec{k})\right)$ мы должны представить $\phi_0(x)$ в виде разложения

$$\phi(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[a^*(\vec{k})e^{ikx} + \alpha(\vec{k})e^{-ikx}\right] \tag{2.279}$$

после чего выполнить интегрирование по переменным a^*, a, α^*, α. Так же, как и при выполнении коммутаций операторов $\hat{a}^+(\vec{k})$, $\hat{a}(\vec{k})$, $\hat{a}^+(\vec{p})$, $\hat{a}(\vec{p})$, при выполнении интегрирований по a^*, a, α^*, α возникнут δ-функции типа $\delta(\vec{p}-\vec{k})$, которые снимут интегрирование по d^3k.

Вклад второго порядка по константе связи в ядро S-матрицы в теории ϕ^4 определяется выражением

$$\begin{gathered}S_2\left(a^*(\vec{k}),\ a(\vec{k})\right) = -\frac{1}{2}\int d^4x \int d^4y \left(\frac{g}{4!}\right)^2 \left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^4 \left(\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right)^4 \times \\ \times \exp\left[-i\int d^4x' J(x')\phi_0(x') + \frac{i}{2}\int d^4x' \int d^4y' J(x')G_0^{(c)}(x'-y')J(y')\right]\Bigg|_{J(x)=0}.\end{gathered} \tag{2.280}$$

Беря вариационные производные по источникам и затем положив $J(x) = 0$, мы получим выражения, соответствующие диаграммам (2.274). В частности, беря четыре вариационные производные от выражения

$$\exp\left[-i\int d^4x' J(x')\phi_0(x')\right], \tag{2.281}$$

мы получим произведение четырех полевых функций $\phi_0(x)$, следовательно, этот член должен давать вклад в четырехчастичный матричный элемент. Произведение четырех функций $\phi_0(x)$ должно умножаться на результат четырехкратного дифференцирования второго сомножителя,

$$\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4x'\int d^4y' J(x')G_0^{(c)}(x'-y')J(y')\right], \tag{2.282}$$

что даст произведение двух фейнмановских пропагаторов, как и в (2.275). Интегрируя по d^4xd^4y, мы получим матричный элемент в импульсном представлении в полном соответствии с операторной формулировкой квантовой теории поля.

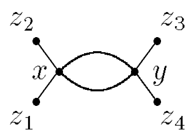
Для получения того же результата мы можем обратиться к формуле (2.268). Коэффициентная функция при $n=4$ есть

$$P_4(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = \iint\ldots\int d^4z_1\ldots d^4z_4\prod_{i=1}^{4}\hat{K}^{(c)}(x_i-z_i)G(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4). \tag{2.283}$$

Как можно показать, четырехточечная функция Грина $G(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)$ во втором порядке теории возмущений с точностью до постоянного множителя представляет собой произведение шести фейнмановских пропагаторов

$$\int d^4x\int d^4y G_0^{(c)}(x-z_1)G_0^{(c)}(x-z_2)G_0^{(c)}(x-y)\,G_0^{(c)}(y-x)G_0^{(c)}(y-z_3)G_0^{(c)}(y-z_4). \tag{2.284}$$

Наглядно это следует из диаграммы



(2.285)

В результате четырехкратного действия оператора $\hat{K}^{(c)}(x_i-z_i)$, $i=1,\ldots 4$, определяемого формулой (2.265), четыре из шести фейнмановских пропагаторов в (2.284) убиваются. При этом снимается интегрирование по $d^4z_1\ldots d^4z_4$, а после подстановки (2.283) в (2.261) и интегрирование по $d^4x_1\ldots d^4x_4$. Вновь остается $\left(G_0^{(c)}(x-y)\right)^2$. После этого, представив полевые переменные $\phi_0(x)$ в (2.261) в виде разложений (2.279), мы должны подставив полученное выражение в (2.278). Выполнив интегрирование по a^*, a, α^*, α, найдем искомый вклад в четырехчастичный матричный элемент.

2.12. Континуальный интеграл в голоморфном представлении. Случай ферми-полей

Теперь мы обсудим, как строится голоморфное представление для ферми полей. Как и ранее, мы начнем с рассмотрения системы с одной степенью свободы. Построим пространство состояний для такой системы. В этом пространстве состояний действуют операторы $\hat{a}^+$, $\hat{a}$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+ = 1,\ (\hat{a}^+)^2 = 0,\ \hat{a}^2 = 0. \tag{2.286}$$

Соответственно, чтобы построить голоморфное представление, нужно ввести грассмановы переменные a^*, a:

$$a^*a + aa^* = 1,\ (a^*)^2 = 0,\ a^2 = 0. \tag{2.287}$$

Произвольную функцию от переменных a^* можно представить в виде

$$f(a^*) = f_{(0)} + f_{(1)}a^*, \tag{2.288}$$

из чего следует, что в качестве базиса в нашем пространстве можно выбрать функции

$$\psi_0 = 1,\ \psi_1 = a^*. \tag{2.289}$$

Определим скалярное произведение в пространстве аналитических функций $\{f(a^*)\}$:

$$(f_1,\ f_2) = \int f_1^*(a^*) f_2(a^*) \exp(-a^*a) da^* da, \tag{2.290}$$

и, используя правила интегрирования для грассмановых переменных,

$$\int a^* da^* = 1,\ \int a da = 1, \tag{2.291}$$

$$\int da^* = 0,\ \int da = 0, \tag{2.292}$$

убедимся в ортонормированности базиса $\{\psi_0,\ \psi_1\}$:

$$< \psi_0 \,|\, \psi_0 > = \int \exp(-a^*a) da^* da = \int (1 - a^*a) da^* da\ = \int aa^* da^* da = 1; \tag{2.293}$$

$$< \psi_1 \,|\, \psi_1 > = \int aa^* \exp(-a^*a) da^* da\ = \int aa^*(1 - a^*a) da^* da = 1; \tag{2.294}$$

$$< \psi_0 \,|\, \psi_1 > = \int a^* \exp(-a^*a) da^* da = 0. \tag{2.295}$$

Определим действие операторов $\hat{a}^+$, $\hat{a}$:

$$\hat{a}^+ f(a^*) = a^* f(a^*);\ \hat{a} f(a^*) = \frac{d}{da^*} f(a^*). \tag{2.296}$$

Операторы $\hat{a}^+$, $\hat{a}$ удовлетворяют соотношениям (2.286), в базисе (2.289) их можно представить матрицами 2×2:

$$\hat{a}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.297}$$

Действительно,

$$\hat{a}^+\psi_0 = a^* = \psi_1;\ \hat{a}^+\psi_1 = (a^*)^2 = 0; \tag{2.298}$$

$$\hat{a}\psi_0 = 0;\ \hat{a}\psi_1 = 1 = \psi_0. \tag{2.299}$$

Сопряженность операторов $\hat{a}^+$, $\hat{a}$ следует уже из представления (2.297). В этом можно убедиться также прямой проверкой.

Произвольный оператор $\hat{A}$ можно записать следующим образом:

$$\hat{A} = K_{00} + K_{01}\hat{a}^+ + K_{10}\hat{a} + K_{11}\hat{a}^+\hat{a} = \sum_{m,n} K_{mn}(\hat{a}^+)^n\hat{a}^m;\ m,\ n = 0,\ 1. \tag{2.300}$$

Ядро оператора $\hat{A}$:

$$A(a^*,\ a) = A_{00} + A_{01}a^* + A_{10}a + A_{11}a^*a = \sum_{m,n} A_{mn}(a^*)^n a^m;\ m,\ n = 0,\ 1; \tag{2.301}$$

$$A_{mn} = <\psi_n\,|\,\hat{A}\,|\,\psi_m> . \tag{2.302}$$

Тогда

$$\hat{A}f(a^*) = \int A(a^*,\ \alpha)f(\alpha^*)\exp(-\alpha^*\alpha)d\alpha^*d\alpha. \tag{2.303}$$

Эта формула является аналогом формулы (2.174).

Произведению операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ соответствует свертка ядер:

$$(\hat{A}\hat{B})(a^*,\ a) = \int A(a^*,\ \alpha)B(\alpha^*,\ a)\exp(-\alpha^*\alpha)d\alpha^*d\alpha. \tag{2.304}$$

Эта формула – аналог формулы (2.178). Формулы (2.303), (2.304) можно проверить непосредственной подстановкой. Например, проверим формулу (2.304):

$$\hat{A}\hat{B}f(a^*) = \iint \sum_{l,n} A_{ln}(a^*)^n\beta^l \sum_{m,p} B_{mp}(\beta^*)^p\alpha^m\ \exp(-\beta^*\beta)f(\alpha^*)\exp(-\alpha^*\alpha)d\beta^*d\beta d\alpha^*d\alpha =$$

$$= \int \sum_{l,m,n,p} A_{ln}B_{mp}(a^*)^n\alpha^m\left(\delta_{p0}\delta_{l0} + \delta_{p1}\delta_{l1}\right)\ f(\alpha^*)\exp(-\alpha^*\alpha)d\alpha^*d\alpha =$$

$$= \int \sum_{l,m,n} B_{ml}A_{ln}(a^*)^n\alpha^m f(\alpha^*)\exp(-\alpha^*\alpha)d\alpha^*d\alpha. \tag{2.305}$$

Ядро оператора $\hat{A}$ можно также определить следующим образом:

$$A(a^*,\ a) = \exp(a^*a)\sum_{m,n} K_{mn}(a^*)^n a^m. \tag{2.306}$$

Чтобы убедиться в этом, необходимо вычислить матричные элементы (2.302).

$$A_{00} = K_{00};\ A_{01} = K_{01};\ A_{10} = K_{10};\ A_{11} = K_{00} + K_{11}. \tag{2.307}$$

Например, учитывая действие операторов $\hat{a}^+$, $\hat{a}$ на базисные функции (2.298), (2.299) и ортонормированность базисных функций (2.293) – (2.295), получим:

$$A_{11} = <\psi_1\,|\,\hat{A}\,|\,\psi_1> = K_{00}\ <\psi_1\,|\,\psi_1> + K_{01}\ <\psi_1\,|\,\hat{a}^+\,|\,\psi_1> +$$

$$+ K_{10}\ <\psi_1\,|\,\hat{a}\,|\,\psi_1> + K_{11}\ <\psi_1\,|\,\hat{a}^+\hat{a}\,|\,\psi_1> = K_{00} + K_{11}. \tag{2.308}$$

С другой стороны, формула (2.306) дает:

$$A(a^*,\ a) = (1 + a^* a)\,(K_{00} + K_{01}a^* + K_{10}a + K_{11}a^* a) =$$

$$= K_{00} + K_{01}a^* + K_{10}a + (K_{00} + K_{11})\,a^* a. \tag{2.309}$$

Учитывая (2.307), мы приходим к разложению (2.301), что доказывает (2.306).

В случае системы с n степенями свободы разложения для произвольного оператора $\hat{A}$ и для ядра этого оператора примут следующий вид:

$$\hat{A} = \sum_{m,\,n} \sum_{\substack{i_1\ <\ \ldots\ <\ i_m \\ j_1\ <\ \ldots\ <\ j_n}} K_{i_1\ldots i_m j_1\ldots j_n} \hat{a}^+_{i_1}\ldots\hat{a}^+_{i_m}\hat{a}_{j_1}\ldots\hat{a}_{j_n}; \tag{2.310}$$

$$A(a^*,\ a) = \sum_{m,\,n} \sum_{\substack{i_1\ <\ \ldots\ <\ i_m \\ j_1\ <\ \ldots\ <\ j_n}} A_{i_1\ldots i_m j_1\ldots j_n} a^*_{i_1}\ldots a^*_{i_m} a_{j_1}\ldots a_{j_n}; \tag{2.311}$$

$$A_{i_1\ldots i_m j_1\ldots j_n} = <\psi_{j_1\ldots j_n}\,|\,\hat{A}\,|\,\psi_{i_1\ldots i_m}>; \tag{2.312}$$

здесь базисные функции

$$\psi_{i_1\ldots i_m} = a^*_{i_1}\ldots a^*_{i_m}. \tag{2.313}$$

Остальные формулы являются прямым обобщением приведенных выше формул для системы с одной степенью свободы на случай n-мерной грассмановой алгебры с образующими $a^*_1,\ \ldots,\ a^*_n,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$.

Спинорное поле можно рассматривать как систему фермионов с бесконечным числом степеней свободы.

$$\psi(\vec{x},\ t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int \sum_i \left[u_i(\vec{k}) b^*_i(\vec{k},\ t)\exp(-i\vec{k}\vec{x}) + v_i(\vec{k}) c_i(\vec{k},\ t)\exp(i\vec{k}\vec{x})\right] d^3k; \tag{2.314}$$

$$\bar{\psi}(\vec{x},\ t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int \sum_i \left[\bar{v}_i(\vec{k}) c^*_i(\vec{k},\ t)\exp(-i\vec{k}\vec{x}) + \bar{u}_i(\vec{k}) b_i(\vec{k},\ t)\exp(i\vec{k}\vec{x})\right] d^3k. \tag{2.315}$$

Здесь $u_i(\vec{k}),\ v_i(\vec{k}),\ i = 1, 2,$ – линейно независимые решения уравнения Дирака. Естественно, $\psi(\vec{x},\ t),\ u_i(\vec{k}),\ v_i(\vec{k})$ являются спинорами, $b^*_i(\vec{k}),\ b_i(\vec{k}),\ c^*_i(\vec{k}),\ c_i(\vec{k})$ – образующие бесконечномерной грассмановой алгебры.

Потенциал взаимодействия спинорного поля с внешним источником:

$$V(\psi,\ \bar{\psi}) = \bar{j}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)j(x); \tag{2.316}$$

$$\xi_i(\vec{k},\, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int \bar{v}_i(\vec{k}) j(\vec{x},\, t) \exp(-i\vec{k}\vec{x}) d^3x; \tag{2.317}$$

$$\eta_i(\vec{k},\, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int \bar{j}(\vec{x},\, t) u_i(\vec{k}) \exp(-i\vec{k}\vec{x}) d^3x. \tag{2.318}$$

Источники $\bar{j}(x)$, $j(x)$ представляют собой антикоммутирующие спинорные функции.

Приведем без вывода выражение для ядра S-матрицы:

$$S\left(b_i^*(\vec{k}),\, b_i(\vec{k}),\, c_i^*(\vec{k}),\, c_i(\vec{k})\right) = \lim_{\substack{t'' \to +\infty \\ t' \to -\infty}} \int \exp\left(\left(\int d^3k \frac{1}{2} \sum_i \left[b_i^*(\vec{k},\, t'')b_i(\vec{k},\, t'')+\right.\right.\right.$$

$$\left. +b_i^*(\vec{k},\, t')b_i(\vec{k},\, t') + c_i^*(\vec{k},\, t'')c_i(\vec{k},\, t'') + c_i^*(\vec{k},\, t')c_i(\vec{k},\, t')\right] +$$

$$+i\int_{t'}^{t''} dt \int d^3k \sum_i \left[\frac{1}{2i}\left(\dot{b}_i^*(\vec{k},\, t)b_i(\vec{k},\, t) - b_i^*(\vec{k},\, t)\dot{b}_i(\vec{k},\, t)+\right.\right.$$

$$\left. +\dot{c}_i^*(\vec{k},\, t)c_i(\vec{k},\, t) - c_i^*(\vec{k},\, t)\dot{c}_i(\vec{k},\, t)\right) - \omega(\vec{k})b_i^*(\vec{k},\, t)b_i(\vec{k},\, t) - \omega(\vec{k})c_i^*(\vec{k},\, t)c_i(\vec{k},\, t)-$$

$$\left.\left. -b_i^*(\vec{k},\, t)\eta_i(\vec{k},\, t) - \eta_i^*(\vec{k},\, t)b_i(\vec{k},\, t) - c_i^*(\vec{k},\, t)\xi_i(\vec{k},\, t) - \xi_i^*(\vec{k},\, t)c_i(\vec{k},\, t)\right]\right) \times$$

$$\times \prod_{\vec{k},i,t} b_i^*(\vec{k},\, t) db_i(\vec{k},\, t) dc_i^*(\vec{k},\, t) dc_i(\vec{k},\, t). \tag{2.319}$$

Граничные условия:

$$b_i^*(\vec{k},\, t'') = b_i^*(\vec{k})e^{i\omega t''};\; b_i(\vec{k},\, t') = b_i(\vec{k})e^{-i\omega t'}; \tag{2.320}$$

$$c_i^*(\vec{k},\, t'') = c_i^*(\vec{k})e^{i\omega t''};\; c_i(\vec{k},\, t') = c_i(\vec{k})e^{-i\omega t'}. \tag{2.321}$$

Оценив выражение в показателе экспоненты в точке экстремума (на решениях уравнений движения), мы приведем (2.319) к виду

$$S\left(b_i^*(\vec{k}),\, b_i(\vec{k}),\, c_i^*(\vec{k}),\, c_i(\vec{k})\right) = \exp\left(\int d^3k \sum_i \left[b_i^*(\vec{k})b_i(\vec{k}) + c_i^*(\vec{k})c_i(\vec{k})\right] -\right.$$

$$\left. -i\int d^4x \left[\bar{j}(x)\psi_0(x) + \bar{\psi}_0(x)j(x)\right] + i\int d^4x \int d^4y \bar{j}(x) S_0^{(c)}(x-y) j(x)\right). \tag{2.322}$$

Здесь $S_0^{(c)}(x-y)$ – причинная функция уравнения Дирака, $\psi_0(x)$ – решение свободного уравнения Дирака.

3. Калибровочные поля (квантовая теория полей со связями)

Теория калибровочных полей представляет собой важный и интересный раздел квантовой теории поля в силу той роли, которую калибровочные поля играют в физике элементарных частиц. Хотя целью наших лекций является рассмотрение формальных приемов континуального интегрирования, построение континуального интеграла для калибровочной теории невозможно без достаточно обстоятельного предварительного обсуждения классической теории систем со связями.

3.1. Связи в лагранжевом и гамильтоновом формализме

Начнем с рассмотрения физической системы с n степенями свободы,

$$S = \int L\,(q,\ \dot{q})\,dt;\ q = \{q^A\},\ A = 1,\ \ldots,\ n. \tag{3.1}$$

Лагранжева теория, описывающая физическую систему со связями, характеризуется равенством 0 детерминанта матрицы, составленной из вторых производных лагранжиана по обобщенным скоростям:

$$\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^A\partial\dot{q}^B}\right\| = 0. \tag{3.2}$$

Этот формальный математический факт имеет несколько следствий. С точки зрения лагранжева формализма, равенство (3.2) означает, что не все уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q^A} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^A} = 0 \tag{3.3}$$

разрешимы относительно своих старших производных $\ddot{q}^A$. Действительно, если матрица $\left\|\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^A\partial\dot{q}^B}\right\|$ не вырождена, уравнения Лагранжа (3.3), или, что эквивалентно,

$$\frac{\partial L}{\partial q^A} - \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^A\partial q^B}\dot{q}^B - \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^A\partial\dot{q}^B}\ddot{q}^B = 0, \tag{3.4}$$

переписываются в виде

$$\ddot{q}^A = \left(\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^A\partial\dot{q}^B}\right\|\right)^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^B} - \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^B\partial q^C}\dot{q}^C\right). \tag{3.5}$$

В случае вырожденности матрицы $\left\| \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \right\|$ только m из n уравнений (3.3), где

$$m = \operatorname{rank} \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \right\|, \tag{3.6}$$

представимы в виде (3.5), а остальные $(n-m)$ уравнений представляют собой связи в лагранжевом формализме:

$$\psi_a\left(q,\ \dot{q}\right) = 0;\ a = 1,\ \ldots,\ (n-m). \tag{3.7}$$

Отметим также, что неразрешимость системы лагранжевых уравнений относительно старших производных означает, что общее решение системы уравнений (3.3) содержит произвольные функции времени, иными словами, задача Коши для системы уравнений (3.3) не имеет единственного решения при произвольных начальных данных, заданных в виде набора всех обобщенных координат и скоростей.

При попытке построить гамильтонову формулировку рассматриваемой теории вырожденность матрицы (3.2) приводит к невозможности разрешить $(n-m)$ из n уравнений

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}, \tag{3.8}$$

с помощью которых вводятся обобщенные импульсы, относительно обобщенных скоростей и выразить последние в виде функций от q и p. $(n-m)$ из n соотношений (3.8), которые невозможно разрешить относительно скоростей, представляют собой так называемые первичными связями в гамильтоновом формализме:

$$\varphi_a(q,\ p) = 0. \tag{3.9}$$

Классическим примером системы со связями (с бесконечным числом степеней свободы) является электромагнитное поле.

$$S = \int \mathcal{L} d^4 x;\ \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}; \tag{3.10}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \tag{3.11}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_0 A_i - \partial_i A_0\right)\left(\partial^0 A^i - \partial^i A^0\right) - \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik}; \tag{3.12}$$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = -\dot{A}_i + \partial_i A_0 = E_i; \tag{3.13}$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0. \tag{3.14}$$

Импульсы p_i, сопряженный пространственным компонентам вектор-потенциала A^i, совпадают с компонентами напряженности электрического поля. Импульс π, сопряженный временной компоненте A^0, обращается в 0 в силу того, что лагранжиан не содержит соответствующих "скоростей". Соотношение (3.14) – первичная связь электродинамики.

В 50-х годах Дираком была построена обобщенная гамильтонова динамика систем со связями. Стимулом для данного исследования явилась необходимость построения гамильтоновой формулировки классической механики системы со связями для последующего квантования этой системы (имеется в виду каноническое квантование, основанное на выводе уравнения Шредингера из операторных уравнений движения с учетом коммутационных соотношений). Согласно Дираку, к "исходному" гамильтониану физической системы, который строится по обычному правилу

$$H_{(0)} = p_A \dot{q}^A - L, \tag{3.15}$$

мы должны добавить линейную комбинацию связей:

$$H_{(1)} = H_{(0)} + \lambda^a \varphi_a. \tag{3.16}$$

(С точки зрения лагранжевого формализма это означает, что мы ищем условный экстремум лагранжиана при выполнении условий (3.7), причем λ^a играют роль стандартных неопределенных множителей Лагранжа к связям.)

Первичные связи имеют место во все моменты времени, следовательно, производные по времени от связей должны обращаться в 0. Производная по времени, как обычно в гамильтоновой динамике, определяется через скобку Пуассона, однако на месте гамильтониана здесь фигурирует величина (3.16):

$$\dot{\varphi}_a = \{\varphi_a,\ H_{(1)}\} = \{\varphi_a,\ H_{(0)}\} + \lambda^b \{\varphi_a,\ \varphi_b\} = 0. \tag{3.17}$$

Определение скобки Пуассона:

$$\{A,\ B\} = \frac{\partial A}{\partial q^a}\frac{\partial B}{\partial p_a} - \frac{\partial A}{\partial p_a}\frac{\partial B}{\partial q^a}. \tag{3.18}$$

Если

$$\det \|\{\varphi_a,\ \varphi_b\}\| \neq 0, \tag{3.19}$$

из (3.17) мы можем определить величины λ^a:

$$\lambda^a = -\{\varphi_a,\ \varphi_b\}^{-1}\{\varphi_b,\ H_{(0)}\}. \tag{3.20}$$

Если условие (3.19) не удовлетворяется, среди уравнений (3.17), вообще говоря, будут присутствовать новые связи. Мы должны добавить линейную комбинацию этих новых связей к гамильтониану $H_{(1)}$, причем эти связи опять-таки должны удовлетворять условиям сохранения во времени. Процедура получения новых связей повторяется до тех пор, пока набор связей не будет исчерпан; предполагается, что, поскольку исходные уравнения теории непротиворечивы, процесс получения связей прервется на некотором конечном этапе, т. е. на этом этапе из условий сохранения во времени не будет получаться новых связей. Все полученные таким образом связи называются вторичными.

В результате мы придем к гамильтониану

$$H_{(2)} = H_{(0)} + \lambda^a \varphi_a, \tag{3.21}$$

здесь $\{\varphi_a\}$ – полный набор связей (первичные + вторичные).

Исходная система гамильтоновых уравнений

$$\dot{q}^A = \{q^A,\ H_{(0)}\};\ \dot{p}_A = \{p_A,\ H_{(0)}\};\ A = 1,\ \ldots,\ m \tag{3.22}$$

и полная система связей

$$\varphi_a(q,\ p) = 0;\ a = 1,\ \ldots,\ (n-m),\ \ldots,\ M \tag{3.23}$$

(M – полное число связей) эквивалентны системе m гамильтоновых уравнений с гамильтонианом $H_{(2)}$:

$$\dot{q}^A = \{q^A,\ H_{(2)}\} = \{q^A,\ H_{(0)}\} + \lambda^a\{q^A,\ \varphi_a\}; \tag{3.24}$$

$$\dot{p}_A = \{p_A,\ H_{(2)}\} = \{p_A,\ H_{(0)}\} + \lambda^a\{p_A,\ \varphi_a\}. \tag{3.25}$$

Как мы видим, в уравнения движения входят величины λ^a. Если полная система связей (3.23) удовлетворяет условиям (3.19), величины λ^a могут быть определены из соотношений вида (3.20). Полная система связей в этом случае называется системой связей второго рода. Гамильтонова система уравнений (3.24), (3.25) имеет единственное решение при заданных начальных условиях.

В общем же случае лишь $l = \operatorname{rank}\|\{\varphi_a,\ \varphi_b\}\|$ из M величин λ^a могут быть найдены из соотношений вида (3.20), остальные же $(M - \operatorname{rank}\|\{\varphi_a,\ \varphi_b\}\|) = (M - l)$ функций остаются произвольными; они представляют собой калибровочные степени свободы. Соответственно, общее решение гамильтоновых уравнений (3.24), (3.25) содержит $(M-l)$ произвольных функций. Мы в этом случае получаем теорию со связями первого рода (вырожденную теорию).

Наблюдаемыми в вырожденной теории являются физические величины, на изменение которых со временем не влияет произвол, содержащийся в функциях λ^a. Для этого достаточно потребовать, чтобы такие величины удовлетворяли соотношениям

$$\{B,\ \varphi_a\} = d_a^b \varphi_b \tag{3.26}$$

(скобки Пуассона наблюдаемых со связями сводятся к линейной комбинации связей). Действительно, тогда в уравнениях, задающих изменение во времени наблюдаемых,

$$\dot{B} = \{B,\ H_{(0)}\} + \lambda^a\{B,\ \varphi_a\}, \tag{3.27}$$

члены, зависящие от λ^a, исчезают на поверхности связей, т. е. в той области фазового пространства, где имеет место динамическое развитие систем во времени.

Вернемся к примеру электромагнитного поля:

$$\dot{A}^i = -p^i + \partial^i A_0; \tag{3.28}$$

$$\mathcal{H}_{(0)} = p_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L} = p_i \left(-p^i + \partial^i A_0\right) + \frac{1}{2} p_i p^i + \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} = -\frac{1}{2} p_i p^i + \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} - A^0 \partial_i p^i. \quad (3.29)$$

(Здесь имеется в виду, что гамильтониан $H_{(0)}$ получается после интегрирования (3.29) по 3-объему,

$$H_{(0)} = \int \mathcal{H}_{(0)} d^3x, \quad (3.30)$$

поэтому в выражении (3.29) можно перебрасывать производные, что соответствует интегрированию по частям.)

$$\mathcal{H}_{(1)} = \mathcal{H}_{(0)} + \lambda^0 \pi; \quad (3.31)$$

$$\dot{\pi} = \{\pi,\ H_{(1)}\} = -\frac{\delta H_{(1)}}{\delta A_0} = \partial_i p^i \quad (3.32)$$

(при раскрытии скобок Пуассона берутся вариационные производные). Мы получили вторичную связь электродинамики –

$$\partial_i p^i = 0. \quad (3.33)$$

Очевидно,

$$\{\pi,\ \partial_i p^i\} = 0. \quad (3.34)$$

В то же время новых связей из условий сохранения во времени мы уже не получим:

$$\mathcal{H}_{(2)} = \mathcal{H}_{(1)} + \lambda^1 \partial_i p^i; \quad (3.35)$$

$$\partial_0 \partial_i p^i = \{\partial_i p^i,\ H_{(2)}\} \equiv 0. \quad (3.36)$$

Условие (3.36) сводится к тождеству, так что электродинамика с точки зрения канонического формализма является теорией со связями первого рода.

Рассмотрим "полный гамильтониан"

$$\mathcal{H}_{(2)} = -\frac{1}{2} p_i p^i + \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} + \left(\lambda^1 - A^0\right) \partial_i p^i + \lambda^0 \pi. \quad (3.37)$$

Из уравнений движения следует:

$$\dot{A}^0 = \{A^0,\ H_{(2)}\} = \lambda^0, \quad (3.38)$$

откуда ясен смысл коэффициента λ^0 – это производная по времени от A^0, которая остается произвольной при решении уравнений движения. Понятно также, что и сама 0-компонента вектор-потенциала остается произвольной – ее можно подвергать калибровочным преобразованиям

$$A'^0 = A^0 + \lambda^1 = A^0 + \partial_0 \alpha, \quad (3.39)$$

где λ^1, α рассматриваются как произвольные функции координат и времени.

Любую теорию со связями первого рода можно сделать теорией со связями второго рода путем задания дополнительных (калибровочных) условий в количестве, равном числу связей первого рода, накладываемых на динамические переменные $q,\ p$:

$$\chi_a(q,\ p) = 0 \tag{3.40}$$

и удовлетворяющих требованию

$$\det \|\{\varphi_a,\ \chi_b\}\| \neq 0, \tag{3.41}$$

так что полная система связей первого рода $\{\varphi_a\}$ и калибровочных условий $\{\chi_a\}$ представляет собой систему связей второго рода.

В действительности, конечной целью всякой калибровки является фиксация произвольных функций λ^a, которые входят в уравнения движения. Поэтому наложение калибровок (3.40) на динамические степени свободы с последующим определением λ^a из соотношений вида (3.20) следует рассматривать как только один из способов фиксации λ^a; калибровки вида (3.40) называются каноническими. Альтернативно, калибровки могут быть наложены на калибровочные (нединамические) степени свободы. Такие неканонические калибровки определяют калибровочные переменные (а, тем самым, и λ^a) как функции динамических переменных.

Как мы знаем, в случае электромагнитного поля динамическими переменными являются пространственные компоненты вектор-потенциала A^i, а калибровочной – временная компонента A^0. Классическим примером канонической калибровки является кулоновская калибровка

$$\partial_i A^i = 0. \tag{3.42}$$

В качестве неканонической калибровки может выступать, например, условие

$$A^0 = 0, \tag{3.43}$$

или – калибровка Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{3.44}$$

Как канонические, так и неканонические калибровки используются при построении континуального интеграла для полей со связями и приводят к различным представлениям континуального интеграла. Забегая вперед, можно сказать, что использование канонических калибровок приводит к формализму редуцированного фазового пространства, в то время как использование неканонических калибровок, накладываемых на калибровочные степени свободы, тесно связано с формализмом расширенного фазового пространства.

3.2. Связи как генераторы калибровочных преобразований

Связи являются генераторами преобразований физических величин, связанных с произволом в выборе функций λ^a. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим изменение со временем физической величины B (не обязательно наблюдаемой). Пусть B_0 – значение этой величины в начальный момент времени t. Через малый промежуток времени δt, в соответствие с уравнениями движения, будем иметь:

$$B = B_0 + \{B,\ H_{(2)}\}\delta t \ = B_0 + \{B,\ H_{(0)}\}\delta t + \lambda^a\{B,\ \varphi_a\}\delta t. \tag{3.45}$$

Поскольку функции λ^a совершенно произвольны, мы можем выбрать их иначе: возьмем в качестве коэффициентов λ^a функции, несколько отличающиеся от первоначальных:

$$\lambda'^a = \lambda^a + \delta\lambda^a. \tag{3.46}$$

При этом значение величины B в момент времени $(t + \delta t)$ изменится на

$$\delta B = \{B,\ \varphi_a\}\varepsilon^a;\ \varepsilon^a = \delta\lambda^a\delta t. \tag{3.47}$$

Соотношение (3.47) можно рассматривать как определение преобразований физических величин, генерируемых связями $\{\varphi_a\}$, с бесконечно малыми параметрами ε^a.

Проведем последовательно два преобразования величины B, генерируемое связями φ_a, сначала с инфинитезимальными параметрами ε^a, а затем – с параметрами ξ^a:

$$\delta_\xi\delta_\varepsilon B = \{\{B,\ \varphi_a\},\ \varphi_b\}\varepsilon^a\xi^b. \tag{3.48}$$

Если мы проведем эти преобразования в обратном порядке, то будем иметь:

$$\delta_\varepsilon\delta_\xi B = \{\{B,\ \varphi_a\},\ \varphi_b\}\xi^a\varepsilon^b. \tag{3.49}$$

Теперь вычтем один результат из другого. В силу тождеств Якоби

$$\delta_\xi\delta_\varepsilon B - \delta_\varepsilon\delta_\xi B \ = (\{\{B,\ \varphi_a\},\ \varphi_b\} - \{\{B,\ \varphi_b\},\ \varphi_a\})\,\varepsilon^a\xi^b =$$

$$= \{B,\ \{\varphi_a,\ \varphi_b\}\}\varepsilon^a\xi^b. \tag{3.50}$$

Выражение (3.50) есть коммутатор двух последовательных преобразований. Мы видим, что коммутатор двух последовательных преобразований есть новое преобразование величины B с генератором $\{\varphi_a,\ \varphi_b\}$. Преобразования (3.47) образуют группу Ли, если

$$\{\varphi_a,\ \varphi_b\} = C^c{}_{ab}\varphi_c \tag{3.51}$$

причем групповой алгебраической операцией является операция взятия скобок Пуассона. Генераторы группы Ли образуют базис алгебры Ли.

Здесь следует напомнить, что алгеброй Ли называется множество элементов (линейное пространство), в котором задана билинейная операция со следующими свойствами:

$$[x,\ y] = -[y,\ x]; \tag{3.52}$$

$$[[x,\ y],\ z] + [[y,\ z],\ x] + [[z,\ x],\ y] = 0. \tag{3.53}$$

Из (3.51) следует известное тождество Якоби для величин $C^c{}_{ab}$, которое понадобится нам в дальнейшем:

$$C^e{}_{ab}C^d{}_{ec} + C^e{}_{ca}C^d{}_{eb} + C^e{}_{bc}C^d{}_{ea} = 0. \tag{3.54}$$

В этом разделе мы будем рассматривать только группы преобразований, для которых величины $C^e{}_{ab}$ являются истинными константами. В частности, для электромагнитного поля структурные константы равны 0, как следует из (3.34).

Найдем преобразования потенциалов A_μ:

$$\delta A^\mu(x) = \int\{A^\mu(x),\ \pi(x')\}\varepsilon(x')d^3x' + \int\{A^\mu(x),\ \partial_i p^i(x')\}\xi(x')d^3x'; \tag{3.55}$$

$$\delta A^0(x) = \int\{A^0(x),\ \pi(x')\}\varepsilon(x')d^3x' = \varepsilon(x); \tag{3.56}$$

$$\delta A^i(x) = \int\{A^i(x),\ \partial^k p_k(x')\}\xi(x')d^3x' = -\int \delta^i_k\partial^k\delta(x-x')\xi(x')d^3x' = \partial^i\xi(x). \tag{3.57}$$

$\varepsilon,\ \xi$ – функции координат и времени. Мы воспользовались здесь тем, что

$$\{A^\mu(x),\ p_\mu(x')\} = \delta(x-x');\ p_\mu = (\pi,\ p_i). \tag{3.58}$$

Из (3.55) – (3.57), вообще говоря, не следует, что $\varepsilon = \partial_0\xi$.

Другой пример – спинорная электродинамика.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar\psi\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\psi - m\bar\psi\psi; \tag{3.59}$$

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot A^i} = -\dot A_i + \partial_i A_0; \tag{3.60}$$

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot A^0} = 0; \tag{3.61}$$

$$\bar p_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} = i\bar\psi\gamma^0;\ p_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar\psi}} = 0; \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{(0)} = p_\mu\dot A^\mu + \bar p_\psi\dot\psi + \dot{\bar\psi}p_\psi - \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}p_ip^i + \bar p_\psi\dot\psi + \frac{1}{4}F_{ik}F^{ik} - A^0\partial_ip^i - \bar p_\psi\dot\psi - \bar\psi\gamma^0 eA_0\psi - \\ -i\bar\psi\gamma^i\left(\partial_i - ieA_i\right)\psi + m\bar\psi\psi &= -\frac{1}{2}p_ip^i + \frac{1}{4}F_{ik}F^{ik} - A^0\left(\partial_ip^i - ie\bar p_\psi\psi\right) - \\ &-i\bar\psi\gamma^i\left(\partial_i - ieA_i\right)\psi + m\bar\psi\psi.\end{aligned} \tag{3.63}$$

Здесь мы имеем 3 первичных связи (3.61) – (3.62), так что

$$\mathcal{H}_{(1)} = \mathcal{H}_{(0)} + \lambda^1\pi + \left(\bar p_\psi - i\bar\psi\gamma^0\right)\lambda^2 + \lambda^3 p_\psi; \tag{3.64}$$

$$\dot\pi = \{\pi,\ H_{(1)}\} = -\frac{\delta H_{(1)}}{\delta A_0} = \partial_ip^i - ie\bar p_\psi\psi. \tag{3.65}$$

Получили вторичную связь – $\partial_i p^i - ie\bar{p}_\psi \psi = 0$.

Можно показать, что условия сохранения во времени связей (3.62) не дают новых связей и позволяют определить величины $\lambda^2,\ \lambda^3$. Связи (3.61), (3.65) являются связями первого рода, и генерируют преобразования величин $A^\mu,\ \psi$. Преобразования A^μ имеют вид (3.56), (3.57);

$$\delta\psi(x) = \int \{\psi(x),\ \partial_i p^i(x') - ie\bar{p}_\psi(x')\psi(x')\}\xi(x')d^3x' = -ie\psi(x)\xi(x); \tag{3.66}$$

$$\psi'(x) = \exp\left(-ie\xi(x)\right)\psi(x). \tag{3.67}$$

3.3. Калибровочная инвариантность с точки зрения лагранжева формализма

Последнее, что остается сделать перед тем, как переходить непосредственно к рассмотрению континуальных интегралов, – это напомнить основные идеи и математические структуры, которые возникают при изучении калибровочных полей с точки зрения лагранжева формализма.

Итак, рассмотрим некоторое, вообще говоря, многокомпонентное поле ψ (но это не обязательно спинорное поле). При преобразованиях из некоторой группы это поле преобразуется по n-мерному представлению. Более определенно, мы будем иметь в виду группы Ли $SU(N)$, реализуемые как унитарные матрицы порядка N, определители которых равны 1. Тогда

$$\psi' = \hat{U}(\theta)\psi, \tag{3.68}$$

где $\theta(x)$ – набор N бесконечно малых параметров преобразования, которые являются функциями координат и времени, а сопряженное поле, соответственно,

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}\hat{U}^{-1}(\theta) \tag{3.69}$$

(имеется в виду комплексное или дираковское сопряжение). Как известно из теории групп Ли, каждый элемент из окрестности единицы группы может быть представлен в виде

$$\hat{U}(\theta) = \hat{1} + ig\hat{T}_a\theta^a, \tag{3.70}$$

где

$$\hat{T}_a = \frac{1}{ig}\frac{\partial\hat{U}(\theta)}{\partial\theta^a}\bigg|_{\theta^1=\ldots=\theta^N=0} \tag{3.71}$$

– генераторы группы Ли (групповое пространство групп Ли является многообразием); g – введенная для удобства константа; в квантовой теории поля играет роль константы связи. Поэтому

$$\hat{U}(\theta) = \exp\left(ig\hat{T}_a\theta^a\right). \tag{3.72}$$

Мы хотим, чтобы лагранжиан поля ψ оставался инвариантным при преобразованиях из рассматриваемой группы. Как известно, для этого мы должны заменить обычные производные поля ψ ковариантными таким образом, чтобы ковариантные производные преобразовывались как сами полевые функции:

$$(\nabla_\mu \psi)' = \hat{U}(\theta)\nabla_\mu \psi. \tag{3.73}$$

В общем случае ковариантная производная поля ψ определяется следующим образом:

$$\nabla_\mu \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - ig\hat{A}_\mu \psi, \tag{3.74}$$

$\hat{A}_\mu$ – набор матричнозначных функций со значениями в алгебре Ли рассматриваемой группы. Это означает, что матрицы $\hat{A}_\mu$ можно представить в виде:

$$\hat{A}_\mu = \hat{T}_a A^a_\mu \tag{3.75}$$

(матрицы $\hat{A}_\mu$ разлагаются по базису алгебры Ли, который образуют генераторы группы). A^a_μ – поле Янга – Миллса (несет групповые индексы).

Пусть $\hat{A}_\mu$ преобразуются по закону

$$\hat{A}'_\mu = \hat{U}(\theta)\hat{A}_\mu \hat{U}^{-1}(\theta) - \frac{i}{g}\frac{\partial \hat{U}(\theta)}{\partial x^\mu}\hat{U}^{-1}(\theta). \tag{3.76}$$

Не составляет труда показать, что при преобразованиях (3.68), (3.76) ковариантные производные поля ψ преобразуются согласно (3.73). Действительно,

$$(\nabla_\mu \psi)' = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\hat{U}(\theta)\psi\right) - ig\left(\hat{U}(\theta)\hat{A}_\mu \hat{U}^{-1}(\theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{g}\frac{\partial \hat{U}(\theta)}{\partial x^\mu}\hat{U}^{-1}(\theta)\right)\hat{U}(\theta)\psi = \hat{U}(\theta)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - ig\hat{A}_\mu \psi\right). \tag{3.77}$$

Если потребовать, чтобы при заменах координат величины $\hat{A}_\mu$ преобразовывались как ковектор (как градиент функции), ковариантная производная также будет вести себя как ковектор при заменах координат.

Выпишем преобразования для поля Янга – Миллса в инфинитезимальной форме.

$$\hat{T}_a A'^a_\mu = \left(\hat{1} + ig\hat{T}_b\theta^b\right)\hat{T}_a A^a_\mu \left(\hat{1} - ig\hat{T}_c\theta^c\right) + \hat{T}_a\frac{\partial \theta^a}{\partial x^\mu}\left(\hat{1} - ig\hat{T}_b\theta^b\right) =$$

$$= \hat{T}_a A^a_\mu + \hat{T}_a\partial_\mu \theta^a - ig[\hat{T}_a,\ \hat{T}_b]A^a_\mu \theta^b. \tag{3.78}$$

Вводя обозначение

$$\hat{\theta} = \hat{T}_a\theta^a, \tag{3.79}$$

можем записать:

$$\delta\hat{A}_\mu = \partial_\mu\hat{\theta} - ig[\hat{A}_\mu,\ \hat{\theta}]. \tag{3.80}$$

Коммутатор генераторов группы может быть представлен в виде линейной комбинации этих генераторов:

$$[\hat{T}_a,\ \hat{T}_b] = -if^c{}_{ab}\hat{T}_c. \tag{3.81}$$

$f^c{}_{ab}$ – структурные константы группы (антисимметричные по своим индексам). При этом

$$\delta A^a_\mu = \partial_\mu\theta^a - gf^a{}_{bc}A^b_\mu\theta^c = D^a_{\mu b}\theta^b; \tag{3.82}$$

$$D^a_{\mu b} \equiv \partial_\mu\delta^a_b + gf^a{}_{bc}A^c_\mu. \tag{3.83}$$

Наконец, введем так называемую "форму кривизны":

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu - ig[\hat{A}_\mu,\ \hat{A}_\nu]. \tag{3.84}$$

Можно убедиться прямой проверкой, что величины $\hat{F}_{\mu\nu}$ составляют антисимметричный тензор 2-го ранга и при калибровочных преобразованиях (3.76) преобразуются по закону

$$\hat{F}'_{\mu\nu} = \hat{U}(\theta)\hat{F}_{\mu\nu}\hat{U}^{-1}(\theta), \tag{3.85}$$

Воспользовавшись вновь соотношением (3.81), можем записать:

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \hat{T}_a F^a_{\mu\nu};\ F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^a{}_{bc}A^b_\mu A^c_\nu. \tag{3.86}$$

Перейдем к конкретным примерам. $U(1)$ – коммутативная группа электромагнитных взаимодействий; групповой элемент имеет вид

$$U(\theta) = \exp(ie\theta);\ g = e; \tag{3.87}$$

структурные константы равны 0; ковариантная производная определяется формулой

$$\nabla_\mu\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - ieA_\mu\psi. \tag{3.88}$$

Группа $SU(2)$ – калибровочная группа слабых взаимодействий с 2-мерным фундаментальным представлением. (Напомним, что фундаментальное представление реализуется группой матриц, название которой совпадает с названием данной группы.) Генераторы группы образуют базис касательного пространства в единице группы; не составляет труда показать, что касательное пространство в единицы группы совпадает с совокупностью всех матриц со следом 0. Размерность этого пространства равна (N^2-1) (для группы $SU(N)$); таково же число генераторов группы и число независимых бесконечно малых параметров. Таким образом, группа $SU(2)$ – 3-параметрическая группа; ее генераторы – матрицы Паули:

$$\hat{T}_a = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_a;\ \mathrm{Tr}\,\hat{T}_a = 0. \tag{3.89}$$

Кроме того, как нетрудно проверить,

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{T}_a\hat{T}_b\right) = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \tag{3.90}$$

Лагранжиан поля Янга – Миллса

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_b\operatorname{Tr}\left(\hat{T}_a\hat{T}^b\right) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a \tag{3.91}$$

Воспроизведем выкладки, аналогичные тем, которые мы имели в случае электромагнитного поля:

$$p^i_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^a_i} = -F^{0i}_a = -\partial^0 A^i_a + \partial^i A^0_a + g f_a{}^{bc} A^0_b A^i_c; \tag{3.92}$$

$$\pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^a_0} = 0; \tag{3.93}$$

$$\dot{A}^a_i = -p^a_i + \partial_i A^a_0 + g f^a{}_{bc} A^b_0 A^c_i; \tag{3.94}$$

$$\mathcal{H}_{(0)} = p^i_a\dot{A}^a_i - \mathcal{L} = -p^i_a p^a_o + p^i_a\partial_i A^a_0 + g f^a{}_{bc} p^i_a A^b_0 A^c_i + \frac{1}{2}p^i_a p^a_i + \frac{1}{4}F^a_{ij}F^{ij}_a =$$

$$= -\frac{1}{2}p^i_a p^a_i + \frac{1}{4}F^a_{ij}F^{ij}_a - A^a_0\left(\partial_i p^i_a - g f_{ab}{}^c A^b_i p^i_c\right) = -\frac{1}{2}p^i_a p^a_i + \frac{1}{4}F^a_{ij}F^{ij}_a - A^a_0 D_i p^i_a. \tag{3.95}$$

$$\mathcal{H}_{(0)} = \mathcal{H}_{(1)} + \lambda^a\pi_a; \tag{3.96}$$

$$\dot{\pi}_a = \{\pi_a,\ H_{(1)}\} = D_i p^i_a. \tag{3.97}$$

Вторичная связь теории Янга – Миллса –

$$\varphi_a \equiv D_i p^i_a = 0. \tag{3.98}$$

$$\{\pi_a,\ D_i p^i_b\} = 0. \tag{3.99}$$

Вычислим подробно скобку Пуассона связей (3.98):

$$\{\varphi_a(x),\ \varphi_b(x')\} = \int\left(\frac{\delta\varphi_a(x)}{\delta A^c_i(y)}\frac{\delta\varphi_b(x')}{\delta p^i_c(y)} - \frac{\delta\varphi_a(x)}{\delta p^i_c(y)}\frac{\delta\varphi_b(x')}{\delta A^c_i(y)}\right)d^3y; \tag{3.100}$$

$$\frac{\delta\varphi_a(x)}{\delta A^c_i(y)} = -g f_{ac}{}^e p^i_e\delta(x-y); \tag{3.101}$$

$$\frac{\delta\varphi_a(x)}{\delta p^i_c(y)} = -\delta^c_a\partial_i\delta(x-y) - g f_{ad}{}^c A^d_i\delta(x-y); \tag{3.102}$$

$$\{\varphi_a(x),\ \varphi_b(x')\} = \int\left[g f_{ac}{}^e p^i_e\delta(x-y)\left(\delta^c_b\partial_i\delta(x'-y)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+g f_{bd}{}^c A^d_i\delta(x'-y)\right) - \left(\delta^c_a\partial_i\delta(x-y) = g f_{ad}{}^c A^d_i\delta(x-y)\right) g f_{bc}{}^e p^i_e\delta(x'-y)\right]d^3y =$$

$$= -g f_{ab}{}^c\partial_i p^i_c\delta(x-x') + g^2 f_{ac}{}^e f^c{}_{bd} A^d_i p^i_e\delta(x-x') + g^2 f_{ad}{}^c f_{cb}{}^e A^d_i p^i_e\delta(x-x') =$$

$$= \left[-g f^c{}_{ab}\partial_i p^i_c - g^2\left(f^c{}_{bd}f_{ca}{}^e + f^c{}_{da}f_{cb}{}^e\right)A^d_i p^i_e\right]\delta(x-x') =$$

$$= \left(-g f^c{}_{ab}\partial_i p^i_c + g^2 f^c{}_{ab}f_{cd}{}^e A^d_i p^i_e\right)\delta(x-x') =$$

$$= -gf^c{}_{ab}D_i p_c^i \delta(x-x') = -gf^c{}_{ab}\varphi_c\delta(x-x'); \qquad (3.103)$$

Итак,

$$\{\varphi_a(x),\ \varphi_b(x')\} = -gf^c{}_{ab}\varphi_c\delta(x-x'). \qquad (3.104)$$

Заметим, что в соотношениях (3.104) фигурируют те же структурные константы $f^c{}_{ab}$, что и в коммутационных соотношениях (3.81) для инфинитезимальных генераторов $\hat{T}_a$.

Покажем, наконец, что формулы для преобразования величин $\hat{A}_\mu$ обладают большой общностью и применимы не только в случае групп $SU(N)$. Рассмотрим, например, преобразования векторов при бесконечно малых преобразованиях координат в n-мерном пространстве,

$$x'^\mu = x^\mu + \theta^\mu. \qquad (3.105)$$

При этом, как мы знаем, векторы преобразуются согласно формулам:

$$Y'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} Y^\nu = \left(\hat{U}(\theta)Y\right)^\mu; \qquad (3.106)$$

$$U^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu};\ (U^{-1})^\nu_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}. \qquad (3.107)$$

Ковариантную производную определим как

$$\nabla_\mu Y^\nu = \partial_\mu Y^\nu + (A_\mu)^\nu_\lambda Y^\lambda = \partial_\mu Y^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} Y^\lambda, \qquad (3.108)$$

где элементы матрицы $\hat{A}_\mu$ мы обозначили $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$:

$$(A_\mu)^\nu_\lambda = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}. \qquad (3.109)$$

Величины $\hat{A}_\mu$ должны преобразовываться согласно формулам

$$\hat{A}'_\mu = \hat{U}(\theta)\hat{A}_\mu\hat{U}^{-1}(\theta) - \frac{\partial\hat{U}(\theta)}{\partial x^\mu}\hat{U}^{-1}(\theta) \qquad (3.110)$$

(ср. с формулой (3.76)). Подставляя (3.107) и учитывая, что при преобразованиях координат величины $\hat{A}_\mu$ преобразуются как ковектор (по индексу μ), т. е.

$$\hat{A}_\mu(x') = \hat{A}_\nu(x)\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}, \qquad (3.111)$$

получим

$$\Gamma'^\rho_{\tau\sigma}(x') = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(x)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu}\right)\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau} =$$

$$= \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu}\left(\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(x)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\mu\partial x'^\tau}\right). \qquad (3.112)$$

Таким образом, элементы матрицы $\hat{A}_\mu$ при преобразованиях координат преобразуются как связности (символы Кристоффеля) $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$. Аналогично, подставив (3.109) в формулу

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + [\hat{A}_\mu,\ \hat{A}_\nu], \tag{3.113}$$

можем убедиться, что элементы матрицы $\hat{F}_{\mu\nu}$ совпадают с компонентами тензора кривизны

$$(F_{\mu\nu})^\rho_\lambda = R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\lambda\mu} + \Gamma^\rho_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} - \Gamma^\rho_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}. \tag{3.114}$$

Теперь становится более наглядной интерпретация величин $\hat{A}_\mu$ как связностей некоторого риманого пространства, а величин $\hat{F}_{\mu\nu}$ – как кривизны этого пространства.

3.4. Трудности построения континуального интеграла для калибровочных полей

При попытке построить континуальный интеграл для калибровочных полей по аналогии с тем, как он строился в обычной квантовой теории поля, мы сталкиваемся с той трудностью, что полученный континуальный интеграл будет расходящимся. Это можно пояснить с помощью следующего рассуждения, хотя и математически нестрогого, но, тем не менее, проливающего свет на суть дела.

Как правило, все лагранжианы, с которыми мы сталкиваемся в квантовой теории поля, могут быть приведены к виду

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi + J\phi \tag{3.115}$$

(скажем, с помощью перебрасывания дифференциальных операторов); $\hat{K}$ можно назвать "оператором уравнений движения"; как было показано на предыдущих лекциях, в случае скалярного поля, например, оператор $\hat{K}$ имеет вид:

$$\hat{K} = \partial_\mu \partial^\mu + m^2, \tag{3.116}$$

а в случае электромагнитного поля, как нетрудно убедиться,

$$\hat{K}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda - \partial_\mu\partial_\nu. \tag{3.117}$$

Если мы рассматриваем калибровочные поля, оператор $\hat{K}$ не имеет обратного. Как говорилось на предыдущих лекциях, в этом случае общее решение уравнений движения содержит произвольные функции координат и времени, иначе говоря, уравнения движения не обладают единственным решением (в смысле задачи Коши). Здесь можно провести аналогию с системой линейных алгебраических уравнений вида $\hat{K}x = J$: если матрица $\hat{K}$ вырождена, решение системы уравнений не единственно.

Континуальный интеграл можно формально представить в виде:

$$\int \prod_x d\phi(x) \exp\left[i\int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi + J\phi\right)\right] \tag{3.118}$$

После выполнения гауссовых квадратур он приводится к виду

$$\left(\det \|\hat{K}\|\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(J\hat{K}^{-1}J\right), \tag{3.119}$$

откуда ясно, что интеграл (3.118) расходится, если оператор $\hat{K}$ вырожден.

Другое объяснение: Пусть $\mathcal{F}$ – пространство всех полевых конфигураций калибровочного поля $A^a_\mu(x)$. Среди этих конфигураций неизбежно присутствуют такие, которые связаны между собой калибровочными преобразованиями. Как говорят, на пространстве $\mathcal{F}$ действует калибровочная группа, т. е. существует отображение

$$\mathcal{G} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}, \tag{3.120}$$

$\mathcal{G}$ – групповое пространство, точками которого являются элементы группы. Пусть $A^{a(0)}_\mu$ – фиксированная полевая конфигурация. Множество всех полевых конфигураций, полученных из $A^{a(0)}_\mu$ калибровочными преобразованиями, называется орбитой калибровочной группы. Иначе говоря, орбитой группы называется подмножество пространства $\mathcal{F}$, на которое отображается множество

$$\mathcal{G} \times A^{a(0)}_\mu. \tag{3.121}$$

Орбиты двух полевых конфигураций либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, орбиты составляют разбиение пространства $\mathcal{F}$. Множество орбит обозначается как

$$\mathcal{F}/\mathcal{G}. \tag{3.122}$$

Введя координаты в пространстве $\mathcal{F}$, можно вычислить объем орбиты калибровочной группы. Он оказывается бесконечным. Континуальный интеграл

$$< A^a_\mu(\vec{x},\ t') \,|\, A^a_\mu(\vec{x},\ t) > = \int \prod_x D[A^a_\mu(x)] \exp\left(iS[A^a_\mu(x)]\right), \tag{3.123}$$

в котором действие $S[A^a_\mu(x)]$ и мера $D[A^a_\mu(x)]$ инвариантны относительно калибровочных преобразований, становится пропорциональным объему орбиты калибровочной группы и поэтому бесконечен.

Разумный выход из такой ситуации (предложенный Фаддеевым и Поповым) состоит в том, чтобы перейти от интегрирования по всем полевым конфигурациям к интегрированию по классам полей, связанных друг с другом калибровочными преобразованиями (классам эквивалентности, как еще говорят, множество которых мы обозначили $\mathcal{F}/\mathcal{G}$). При этом вклад полевых конфигураций, связанных между собой калибровочными преобразованиями, должен выделиться в бесконечный нормировочный множитель перед континуальным интегралом.

Для того, чтобы перейти к интегрированию по классам эквивалентности, необходимо выбрать по одному представителю от каждой орбиты калибровочной группы. Выбор представителей достигается наложением калибровочных условий

$$f^a[A^b_\mu(x)] = 0, \tag{3.124}$$

число которых равно числу калибровочных параметров (числу произвольных функций, которые необходимо зафиксировать). $f^a[A^b_\mu(x)]$ есть, вообще говоря, функционал от $A^b_\mu(x)$, он зависит от самих полевых переменных A^b_μ и их производных. Калибровочные условия должны выделять поверхность в пространстве всех полевых конфигураций $\mathcal{F}$, которая пересекает каждую групповую орбиту только один раз. Следовательно, калибровочные условия должно однозначно фиксировать параметры калибровочных преобразований.

Для калибровок, используемых на практике, не всегда выполняется это требование. Они все еще допускают калибровочные преобразования, параметры которых удовлетворяют уравнению, являющемуся следствием (3.124):

$$\int \frac{\delta f^a(x)}{\delta A^b_\mu(x')}\delta A^b_\mu(x')d^4x' = 0. \tag{3.125}$$

δA^a_μ – изменение поля A^a_μ при калибровочных преобразованиях. Для полей Янга – Миллса, как мы видели,

$$\delta A^a_\mu = \partial_\mu\theta^a - gf^a{}_{bc}A^b_\mu\theta^c. \tag{3.126}$$

Уравнение (3.125) можно переписать следующим образом:

$$\int \hat{M}^a_b(x,\ x')\theta^b(x')d^4x' = 0, \tag{3.127}$$

где

$$\hat{M}^a_b(x,\ x') = \frac{\delta f^a(x)}{\delta\theta^b(x')} = \int \hat{B}^{a\mu}_c(x,\ y)\hat{C}^c_{b\mu}(y,\ x')d^4y; \tag{3.128}$$

$$\hat{B}^{a\mu}_c(x,\ y) = \frac{\delta f^a(x)}{\delta A^c_\mu(y)}; \tag{3.129}$$

$$\hat{C}^c_{b\mu}(y,\ x') = \frac{\delta A^c_\mu(y)}{\delta\theta^b(x')} = -\delta^c_b\partial_\mu\delta(y-x') - gf^c{}_{db}A^d_\mu\delta(y-x'). \tag{3.130}$$

Например, для аналога калибровки Лоренца для полей Янга – Миллса имеем:

$$f^a[A^b_\mu(x)] = \partial^\mu A^a_\mu = 0; \tag{3.131}$$

$$\hat{B}^{a\mu}_c(x,\ y) = -\delta^a_c\partial^\mu\delta(x-y); \tag{3.132}$$

$$\int \hat{M}^a_b(x,\ x')\theta^b(x')d^4x' = -\int \delta^a_c\partial^\mu\delta(x-y)\left(\delta^c_b\partial_\mu\theta^b(y) - gf^c{}_{db}A^d_\mu(y)\theta^b(y)\right)d^4y =$$
$$= \partial_\mu\partial^\mu\theta^a(x) - gf^a{}_{db}\partial^\mu\left(A^d_\mu(x)\theta^b(x)\right) = \partial_\mu\partial^\mu\theta^a - gf^a{}_{db}A^d_\mu\partial^\mu\theta^b = D_\mu\partial^\mu\theta^a. \tag{3.133}$$

(В этих выкладках мы воспользовались самим калибровочным условием (3.131).)

Допустимыми называются те калибровки, для которых наложением определенных граничных условий можно окончательно зафиксировать параметры остаточных преобразований θ^a, т. е. граничные условия выделяют единственное решение уравнения

(3.127). Например, если из того, что на концах рассматриваемого временного интервала (для которого амплитуда перехода между полевыми конфигурациями определяется через континуальный интеграл) параметры остаточных преобразований равны нулю

$$\theta^a(t,\ \vec{x}) = \theta^a(t',\ \vec{x}) = 0, \tag{3.134}$$

следует, что они зануляются на всем временном интервале

$$\theta^a(\tau,\ \vec{x}) = 0,\ t \leq \tau \leq t', \tag{3.135}$$

у нас более не остается произвола в преобразованиях полевых переменных, и каждый класс эквивалентности представлен единственной полевой конфигурацией. Как мы увидим, граничные условия (3.134) всегда учитываются при построении континуального интеграла по калибровочным полям.

Однако, существуют калибровки, для которых параметры остаточных преобразований не удается зафиксировать никакими граничными условиями. В этом случае поверхность в пространстве всех полевых конфигураций, задаваемая уравнением (3.124), пересекает орбиты калибровочной группы неоднократно. Неопределенности в выборе представителей классов эквивалентности известны как неопределенности Грибова.

3.5. Метод Фаддеева – Попова (лагранжев формализм)

Теперь мы обратимся непосредственно к рассмотрению метода Фаддеева – Попова построения континуального интеграла для калибровочных полей. Начнем с того, что введем функционал

$$\Delta^{-1} = \int \prod_{x,a} \delta\left(f^a[A^b_\mu(x)]\right) \prod_x D\Omega[\theta^a(x)], \tag{3.136}$$

где $D\Omega[\theta^a(x)]$ – мера на калибровочной группе; произведение берется по всем пространственно-временным точкам.

Вспомним, что обычная δ-функция обладает свойством

$$\prod_i \delta\left(\varphi^i(x^j)\right) = \left(\det\left\|\frac{d\varphi^i}{dx^j}\right\|\right)^{-1} \prod_j \delta(x^j), \tag{3.137}$$

которое представляет собой просто правило замены переменных. Непосредственным обобщением этого правила для δ-функционала, фигурирующего в (3.137), является формула

$$\prod_{x,a} \delta\left(f^a[A^b_\mu(x),\ \theta^c(x)]\right) = \left(\det\left\|\frac{\delta f^a(x)}{\delta\theta^b(x')}\right\|\right)^{-1} \prod_{x,a} \delta\left(\theta^a(x)\right) \tag{3.138}$$

Поэтому

$$\Delta^{-1} = \int \left(\det\left\|\frac{\delta f^a(x)}{\delta\theta^b(x')}\right\|\right)^{-1} \prod_{x,a} \delta\left(\theta^a(x)\right) \prod_x D\Omega[\theta^a(x)] =$$

$$= \left(\det \left\| \frac{\delta f^a(x)}{\delta \theta^b(x')} \right\| \right)^{-1} = \left(\det \| \hat{M}^a_b(x,\ x') \| \right)^{-1}. \tag{3.139}$$

Докажем, что функционал Δ^{-1} калибровочно-инвариантен.

Запись $f^a[A^b_\mu,\ \theta^c]$ означает, что рассматриваемая полевая конфигурация $A^b_\mu(x)$ отвечает значениям $\theta^c(x)$ параметров калибровочных преобразований. Тогда

$$\Delta^{-1}[A^b_\mu,\ \theta^c + \theta'^c] = \int \prod_{x,a} \delta\left(f^a[A^b_\mu,\ \theta^c + \theta'^c]\right) \prod_x D\Omega[\theta^a] =$$

$$= \int \prod_{x,a} \delta\left(f^a[A^b_\mu,\ \theta^c + \theta'^c]\right) \prod_x D\Omega[\theta^a + \theta'^a] = \int \prod_{x,a} \delta\left(f^a[A^b_\mu,\ \theta''^c]\right) \prod_x D\Omega[\theta''^a] =$$

$$= \int \prod_{x,a} \delta\left(f^a[A^b_\mu,\ \theta^c]\right) \prod_x D\Omega[\theta^a] = \Delta^{-1}[A^b_\mu,\ \theta^c]. \tag{3.140}$$

Здесь мы воспользовались инвариантностью групповой меры:

$$\prod_x D\Omega[\theta^a + \theta'^a] = \prod_x D\Omega[\theta^a]. \tag{3.141}$$

Сумма параметров преобразований $(\theta^a + \theta'^a)$ отвечает произведению элементов группы:

$$\hat{U}(\theta')\hat{U}(\theta) = \hat{U}(\theta''), \tag{3.142}$$

но если элемент $\hat{U}(\theta)$ пробегает всю группу, то и элемент $\hat{U}(\theta'')$ также пробегает всю группу. В последней строчке в (3.140) мы просто изменили обозначение переменной интегрирования.

Теперь введем под знак континуального интеграла (3.123) величину

$$\Delta \times \int \prod_{x,a} \delta\left(f^a[A^b_\mu(x)]\right) \prod_x D\Omega[\theta^a(x)] = 1 \tag{3.143}$$

(совершим "разложение единицы"). Будем иметь:

$$< A^a_\mu(\vec{x},\ t') \,|\, A^a_\mu(\vec{x},\ t) > = \int \exp\left(iS[A^a_\mu(x)]\right) \Delta \times \int \prod_{x,a} \delta\left(f^a[A^b_\mu(x)]\right) \times$$

$$\times \prod_x D\Omega[\theta^a(x)] D[A^a_\mu(x)]. \tag{3.144}$$

Изменим порядок интегрирования в полученном континуальном интеграле:

$$< A^a_\mu(\vec{x},\ t') \,|\, A^a_\mu(\vec{x},\ t) > = \int \prod_x D\Omega[\theta^a(x)] \times$$

$$\times \int \exp\left(iS[A^a_\mu(x)]\right) \Delta \prod_{x,a} \delta\left(f^a[A^b_\mu(x)]\right) \prod_x D[A^a_\mu(x)]. \tag{3.145}$$

В силу инвариантности действия $S[A_\mu^a(x)]$ и меры $D[A_\mu^a(x)]$, а также функционала Δ внутренний интеграл в (3.145) калибровочно-инвариантен. Объем калибровочной группы выделен в бесконечный нормировочный множитель

$$\int \prod_x D\Omega[\theta^a(x)]. \tag{3.146}$$

Мы получили регуляризованный интеграл

$$< A_\mu^a(\vec{x},\ t') \,|\, A_\mu^a(\vec{x},\ t) >^{(reg)} = \int \exp\left(iS[A_\mu^a(x)]\right) \det \|\hat{M}_b^a(x,\ x')\| \prod_{x,a} \delta\left(f^a[A_\mu^b(x)]\right) \times$$

$$\times \prod_x D[A_\mu^a(x)]. \tag{3.147}$$

Фигурирующий в (3.147) δ-функционал может быть представлен в виде континуального интеграла:

$$\prod_{x,a} \delta\left(f^a[A_\mu^b(x)]\right) = \int \prod_{x,a} d\lambda_a(x) \exp\left(i \int d^4x \lambda_c f^c[A_\mu^b(x)]\right) \tag{3.148}$$

Можно параметризовать и $\det \|\hat{M}_b^a(x,\ x')\|$, записав его в виде интеграла по грассмановым скалярным полям:

$$\det \|\hat{M}_b^a(x,\ x')\| = \int \prod_{x,a} d\bar{\eta}_a(x) d\eta^a(x)\, \exp\left(\int d^4x d^4x' \bar{\eta}_b(x) \hat{M}_c^b(x,\ x') \eta^c(x')\right). \tag{3.149}$$

Окончательно имеем:

$$< A_\mu^a(\vec{x},\ t') \,|\, A_\mu^a(\vec{x},\ t) >^{(reg)} = \int \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}\right) + \right.$$

$$\left. + \int d^4x d^4x' \bar{\eta}_b(x) \hat{M}_c^b(x,\ x') \eta^c(x') + i \int d^4x \lambda_c f^c[A_\mu^b(x)]\right] \times$$

$$\times \prod_x D[A_\mu^a(x)] \prod_{x,a} d\bar{\eta}_a(x) d\eta^a(x) d\lambda_a(x). \tag{3.150}$$

Мы получили континуальный интеграл с эффективным действием Фаддеева – Попова в лагранжевой форме. Эффективное действие содержит два дополнительных члена: член, фиксирующий калибровку

$$S_{(fix)} = \int d^4x \lambda_c f^c[A_\mu^b(x)] \tag{3.151}$$

и член, содержащий "духи Фаддеева – Попова"

$$S_{(ghost)} = -i \int d^4x d^4x' \bar{\eta}_b(x) \hat{M}_c^b(x,\ x') \eta^c(x'). \tag{3.152}$$

Переменные $\lambda_a(x)$, появившиеся в (3.148), как и ранее, играют роль неопределенных множителей Лагранжа, в данном случае – при калибровке. Поля $\bar{\eta}_a$, η^a являются нефизическими (ненаблюдаемыми), однако они обеспечивают унитарность S-матрицы. Выпишем явно духовое действие для калибровки Лоренца в электродинамике и для полей Янга – Миллса.

В случае электродинамики мы имеем:

$$\int \hat{M}(x,\ x')\eta(x')d^4x' = \partial_\mu\partial^\mu\eta, \tag{3.153}$$

так что духовое действие будет иметь вид

$$S_{(ghost)} = -i\int d^4x\bar{\eta}\partial_\mu\partial^\mu\eta, \tag{3.154}$$

и духи не взаимодействуют с калибровочными полями. В выражении (3.150) для амплитуды перехода вклад духов отфакторизовывается. Однако, для калибровки

$$\partial^\mu A^a_\mu = 0 \tag{3.155}$$

в случае полей Янга – Миллса мы получали выражение

$$\int \hat{M}^a_b(x,\ x')\eta^b(x')d^4x' = D_\mu\partial^\mu\eta^a, \tag{3.156}$$

откуда

$$S_{(ghost)} = -i\int d^4x\left(\bar{\eta}_b\partial_\mu\partial^\mu\eta^b - gf^b{}_{dc}A^d_\mu\bar{\eta}_b\partial^\mu\eta^c\right). \tag{3.157}$$

В теории, соответствующей эффективному действию Фаддеева – Попова, появляется новая вершина – вершина взаимодействия духов с калибровочным полем, так что вклад духов уже нельзя отделить, и они появляются в диаграммах Фейнмана, но только во внутренних петлях.

Отметим, что эффективное действие, существование которого обосновывается при построении континуального интеграла по калибровочным полям методом Фаддеева – Попова, используется при квантовании калибровочных полей другими способами, без непосредственного использования континуального интеграла. При этом с духами обращаются как с фермионными полями (но скалярными, а не спинорными – духи имеют неправильную связь спина со статистикой). Впрочем, подход, основанный на континуальном интегрировании, имеет явное преимущество при квантовании калибровочных теорий, поскольку в этом подходе не возникает вопроса, на что накладывается калибровка: на полевые операторы, на их частотные части или на вектор состояния.

3.6. Математические проблемы, присущие методу Фаддеева – Попова

Нельзя не отметить, что метод Фаддеева – Попова при его кажущейся очевидности со строго математической точки зрения содержит некорректные действия. В самом деле, при выделении объема по калибровочной группе в бесконечный нормировочный множитель необходимо изменять порядок интегрирования в континуальном интеграле, который изначально является расходящимся, а это нельзя признать математически обоснованным действием.

Можно поступить иначе. Не обращаясь к заведомо расходящемуся интегралу (3.123), рассматривать сразу регуляризованое выражение (3.147) для континуального интеграла. Однако при этом встает вопрос о доказательстве калибровочной инвариантности интеграла (3.147), т. е. о доказательстве его независимости от выбора поверхности в пространстве полевых конфигураций $\mathcal{F}$, определяемой калибровкой. Такое доказательство также неизбежно будет содержать изменение порядка интегрирования в математически плохо определенных выражениях.

Две поверхности будут отличаться набором параметров θ, фиксируемых калибровкой. Доказательство можно провести, "раскладывая единицу" в соответствии со (3.143) уже под знаком интеграла (3.147). При этом δ-функционал в операторе Δ в (3.143) должен определять поверхность

$$g^a[A^b_\mu(x)] = 0, \tag{3.158}$$

отличающуюся от поверхности, фиксируемой калибровкой в интеграле (3.147), сдвигом параметров θ.

$$< A^a_\mu(\vec{x},\ t') \,|\, A^a_\mu(\vec{x},\ t) >^{(reg)} = \int \exp\left(iS[A^a_\mu(x)]\right) \det \|\hat{M}^a_b(x,\ x')\| \prod_{x,a} \delta\left(f^a[A^b_\mu,\ \theta^c]\right) \times$$

$$\times \Delta \times \int \prod_{x,a} \delta\left(g^a[A^b_\mu,\ \theta^c + \theta'^c]\right) \prod_x D\Omega[\theta'^a(x)] \prod_x D[A^a_\mu(x)]. \tag{3.159}$$

Здесь интеграл по θ'^a предшествует интегралу по A^a_μ. Изменим порядок интегрирования и произведем сдвиг вдоль орбиты калибровочной группы

$$A^a_\mu(\theta^c) \to A^a_\mu(\theta^c - \theta'^c) \tag{3.160}$$

при фиксированном θ'^c. Получим:

$$\iint \exp\left(iS[A^a_\mu(x)]\right) \det \|\hat{M}^a_b(x,\ x')\| \Delta \prod_{x,a} \delta\left(f^a[A^b_\mu,\ \theta^c - \theta'^c]\right) \prod_{x,a} \delta\left(g^a[A^b_\mu,\ \theta^c]\right) \times$$

$$\times \prod_x D[A^a_\mu(x)] \prod_x D\Omega[\theta'^a(x)]. \tag{3.161}$$

(Действие и мера $D[A^a_\mu(x)]$ не изменяются.) Снова меняя порядок интегрирования по A^a_μ и θ'^a, и делая замену

$$\theta'^c \to -\theta'^c, \tag{3.162}$$

приходим к выражению

$$< A^a_\mu(\vec{x},\ t') \,|\, A^a_\mu(\vec{x},\ t) >^{(reg)} = \int \exp\left(iS[A^a_\mu(x)]\right) \det \|\hat{M}^a_b(x,\ x')\| \times$$

$$\times\Delta \int \prod_{x,a} \delta\left(f^a[A^b_\mu,\ \theta^c+\theta'^c]\right) \prod_x D\Omega[\theta'^a(x)] \prod_{x,a} \delta\left(g^a[A^b_\mu,\ \theta^c]\right) \prod_x D[A^a_\mu(x)] =$$

$$= \int \exp\left(iS[A^a_\mu(x)]\right) \det \|\hat{M}^a_b(x,\ x')\| \prod_{x,a} \delta\left(g^a[A^b_\mu,\ \theta^c]\right) \prod_x D[A^a_\mu(x)]. \qquad (3.163)$$

Таким путем Фаддеев и Попов предлагают переходить от калибровки

$$f^a[A^b_\mu(x)] = 0 \qquad (3.164)$$

к калибровке (3.158) в интеграле (3.147). Иными словами, каким бы путем мы не обосновывали калибровочную инвариантность регуляризованного интеграла (3.147), это обоснование всегда включает операции с расходящимися интегралами, содержащими интегрирование по группе.

Существует еще одна тонкость, на которую стоит обратить внимание. Исходный расходящийся интеграл (3.123) содержит интегрирование по групповым орбитам в пространстве полевых конфигураций $\mathcal{F}$, в то время как в результате процедуры Фаддеева – Попова отфакторизовывается интеграл по групповому пространству $\mathcal{G}$. Это правомерно в том случае, если каждая орбита

$$\mathcal{G} \times A^a_\mu \qquad (3.165)$$

является "копией" группового пространства, т. е. существует взаимно однозначное соответствие между точками группового пространства и точками орбиты. Тогда в пространстве $\mathcal{F}$ можно ввести такие координаты, чтобы объемы всех орбит совпадали и были пропорциональны объему группового пространства. Однако это не справедливо в случае произвольной группы преобразований. Часто существуют вырожденные орбиты, содержащие точки, инвариантные относительно подгрупп рассматриваемой группы преобразований.

На практике обычно принимается предположение, что групповое пространство $\mathcal{G}$ и пространство полевых конфигураций $\mathcal{F}$ обладают необходимыми свойствами, а поверхность, задаваемая калибровочным условием (3.164), действительно пересекает каждую орбиту только в одной точке. Поэтому метод Фаддеева – Попова применяется, скажем, и в теории гравитации (о чем мы будем говорить позднее), несмотря на то, что структура группы диффеоморфизмов (группы общих координатных преобразований) гораздо сложнее, чем, скажем, структура групп $SU(N)$, и не полностью изучена.

3.7. Граничные условия и калибровочная инвариантность

Итак, в результате "разложения единицы" под знаком континуального интеграла в действии появляются дополнительные члены: член, фиксирующий калибровку, и член, содержащий духи Фаддеева – Попова. Обратим теперь внимание на то, что в функционале Δ^{-1} (3.136) интегрирование по группе должно производиться только во внутренних точках рассматриваемого временного интервала. Действительно, в исходном расходящемся континуальном интеграле интегрирование по полевым конфигурациям ведется тоже только во внутренних временных точках; на концах временного интервала полевые конфигурации считаются фиксированными. Поэтому амплитуда перехода (3.123) содержит интегрирование по бесконечным орбитам калибровочной группы только во внутренних временных точках.

Следовательно, в континуальном интеграле с эффективным действием Фаддеева – Попова (3.150) мы должны исключить член, фиксирующий калибровку, и духовый член в граничных точках временного интервала. Это достигается наложением граничных условий на духи и лагранжев множитель при калибровке:

$$\eta^a(\vec{x},\, t) = \eta^a(\vec{x},\, t') = 0, \tag{3.166}$$

$$\bar{\eta}_a(\vec{x},\, t) = \bar{\eta}_a(\vec{x},\, t') = 0, \tag{3.167}$$

$$\lambda_a(\vec{x},\, t) = \lambda_a(\vec{x},\, t') = 0. \tag{3.168}$$

Континуальный интеграл (3.150) обычно рассматривается при граничных условиях (3.166) – (3.168); граничные условия подразумеваются даже в тех случаях, когда это специально не оговаривается в литературе. Заметим, что граничные условия (3.168) имеют явный физический смысл: они обеспечивают калибровочную инвариантность амплитуды перехода и отсутствие духов в физических состояниях (так как в противном случае на границе была бы фиксирована калибровка, а начальное и конечное состояние физической системы зависело бы от духовых полей).

При этом, однако, надо иметь в виду, что если мы рассматриваем амплитуды перехода между последовательными моментами времени

$$< A^a_\mu(\vec{x},\, t') \,|\, A^a_\mu(\vec{x},\, t'') >; \tag{3.169}$$

$$< A^a_\mu(\vec{x},\, t'') \,|\, A^a_\mu(\vec{x},\, t) >, \tag{3.170}$$

то интеграл

$$< A^a_\mu(\vec{x},\, t') \,|\, A^a_\mu(\vec{x},\, t) > = \int < A^a_\mu(\vec{x},\, t') \,|\, A^a_\mu(\vec{x},\, t'') > < A^a_\mu(\vec{x},\, t'') \,|\, A^a_\mu(\vec{x},\, t) > \times$$

$$\times \prod_{\vec{x}} D[A^a_\mu(\vec{x},\, t'')] \tag{3.171}$$

опять является расходящимся, и для его регуляризации вновь приходится прибегать к "разложению единицы" в точке t''.

Требование калибровочной инвариантности физических состояний отвечает данным "лабораторной" физики. На сегодняшний день в физических экспериментах не наблюдается эффектов, которые следовало бы интерпретировать как следствие нарушения калибровочной инвариантности. Однако нельзя быть уверенным, что калибровочная инвариантность представляет собой фундаментальный принцип; возможно, мы еще не достигли того уровня явлений природы, на котором калибровочные эффекты проявляют себя. Обнаружение таких эффектов может быть связано с более глубоким пониманием структуры вакуума, которая сейчас привлекает внимание многих физиков. Кроме того, построение калибровочно-инвариантной квантовой теории гравитации наталкивается на серьезные трудности, как математического, так и идеологического характера (проблемы, связанные с интерпретацией и т. п.), и это может привести к пересмотру нашего отношения к принципу калибровочной инвариантности.

Граничные условия играют также важную роль при аппроксимации континуального интеграла. Как мы помним, с математической точки зрения континуальный интеграл нужно рассматривать как предел конечномерного интеграла при стремлении к нулю наибольшего отрезка разбиения временного интервала. По Фейнману, на каждом временном отрезке действие аппроксимируется своим экстремальным значением, которое дает классическую траекторию на этом отрезке. Поэтому при аппроксимации действия мы можем использовать решения классических уравнений движения.

Уравнения движения, получаемые из эффективного действия Фаддеева – Попова, калибровочно-неинвариантны и содержат духи, поскольку действие содержит калибровочно-неинвариантные члены и духи (духовый член также калибровочно-неинвариантен по построению). Уравнения для физических и калибровочных степеней свободы должны быть дополнены уравнениями для духов

$$\hat{M}^a_b \eta^b = 0;\ \hat{M}^{+b}{}_a \bar{\eta}_b = 0 \qquad (3.172)$$

($\hat{M}^{+b}{}_a$ – оператор, эрмитово-сопряженный оператору $\hat{M}^a_b$) и уравнениями калибровки, получаемыми варьированием действия по лагранжевым множителям λ_a. Вся эта система должна рассматриваться при граничных условиях (3.166) – (3.168).

Оказывается, граничные условия (3.166) – (3.168) выделяют калибровочно-инвариантные решения этой расширенной системы уравнений; при этом из уравнений исключаются члены, нарушающие калибровочную инвариантность. В самом деле, например, уравнения для духов η^a (3.172) совпадают с уравнениями для параметров остаточных калибровочных преобразований (3.127). Но, как уже обсуждалось выше, рассматриваются лишь те калибровки, для которых с помощью специальных граничных условий типа (3.166) можно обратить в нуль переменные η^a на всем временном интервале; следовательно, члены, содержащие η^a, уйдут из уравнений движения для физических и калибровочных степеней свободы. То же самое справедливо для переменных $\bar{\eta}_a$ и λ_a; уравнения для переменных λ_a могут быть получены как следствие полной системы уравнений движения.

Мы получим калибровочно-инвариантную аппроксимацию эффективного действия, а, фактически, мы вернемся к калибровочно-инвариантному действию и расходящемуся континуальному интегралу, содержащему интегрирование по орбитам калибровочной группы. Таким образом, явный учет калибровочных условий при аппроксимации континуального интеграла является в определенном смысле обратной процедурой по отношению к регуляризации, предложенной Фаддеевым и Поповым. В конкретных расчетах приходится использовать ту или иную регуляризацию, и результат может зависеть от калибровки. В частности, как мы увидим далее, от калибровки зависят функции Грина.

3.8. Метод Фаддеева – Попова (гамильтонов формализм). Редуцированное фазовое пространство

Теперь мы обратимся к гамильтоновой форме континуального интеграла для систем со связями. Для нас будет предпочтительнее проделать все выкладки для системы с конечным числом степеней свободы, действие для которой есть

$$S = \int \left(p_A \dot{q}^A - H_{(0)}\right) dt. \tag{3.173}$$

Пусть n – число канонических пар степеней свободы,

$$(q,\ p) = \{(q^A,\ p_A)\},\ A = 1,\ \ldots,\ n; \tag{3.174}$$

M – полное число связей:

$$\varphi_a(q,\ p) = 0;\ a = 1,\ \ldots,\ M. \tag{3.175}$$

Разумеется, мы предполагаем, что система связей $\{\varphi_a\}$ является системой связей первого рода; выберем дополнительные условия

$$\chi_a(q,\ p) = 0 \tag{3.176}$$

в количестве, равном числу связей первого рода, удовлетворяющие требованию

$$\det \|\{\varphi_a,\ \chi_b\}\| \neq 0. \tag{3.177}$$

Кроме того, удобно считать, что χ_a коммутируют друг с другом:

$$\{\chi_a,\ \chi_b\} = 0. \tag{3.178}$$

Полная система связей и калибровочных условий выделяет в фазовом пространстве (которое имеет размерность $2n$) поверхность Σ размерности $(2n - 2M) = 2(n - M)$. На этой поверхности можно ввести новые канонические переменные

$$(q^*,\ p^*), \tag{3.179}$$

соответствующие "истинно физическим" степеням свободы. Например, в электродинамике роль физических переменных q^*, p^* играют трехмерно-поперечные компоненты полей A^i и E_i. Пространство переменных $(q^*,\ p^*)$ носит название редуцированного фазового пространства. Имеется в виду, что с помощью дополнительных (калибровочных) условий (3.176) динамика рассматриваемой системы, определяемая гамильтонианом $H_{(0)}$ и связями $\{\varphi_a\}$ в переменных $(q,\ p)$, сводится (редуцируется) к динамике истинно физических степеней свободы $(q^*,\ p^*)$.

Возможность введения переменных $(q^*,\ p^*)$ на поверхности Σ основывается на том, что $2M$ уравнений связей и калибровочных условий можно разрешить относительно $2M$ из $2n$ канонических переменных, выразив эти $2M$ переменных как функции остальных $2(n-M)$ переменных, которые и будут переменными $(q^*,\ p^*)$ – координатами на поверхности Σ.

Условие разрешимости $2M$ уравнений связей и калибровки есть

$$\det \left\| \begin{matrix} \left(\dfrac{\partial\varphi_a}{\partial q^A}\right) & \left(\dfrac{\partial\chi_b}{\partial q^B}\right) \\ \left(\dfrac{\partial\varphi_a}{\partial p_A}\right) & \left(\dfrac{\partial\chi_b}{\partial p_B}\right) \end{matrix} \right\| \neq 0. \tag{3.180}$$

Не сложно убедиться в том, что условие (3.177) есть лишь иная форма записи условия (3.180). Наиболее просто это сделать, если ввести новые канонические переменные

$$\{(q^A,\ p_A)\} \to \{(q^a,\ p_a),\ (q^{*i},\ p^*_i)\}; \tag{3.181}$$

$$a = 1,\ \ldots,\ M;\ i = 1,\ \ldots,\ (n-M); \tag{3.182}$$

$$p_a = \chi_a(q,\ p) \tag{3.183}$$

(эти переменные можно ввести благодаря выполнению условия (3.178)). При этом условие (3.177) принимает вид

$$\det \left\| \frac{\partial\varphi_a}{\partial q^b} \right\| \neq 0, \tag{3.184}$$

$\{q^a\}$ – координаты, канонически сопряженные новым импульсам $\{p_a\}$. Соотношение (3.184) – это условие разрешимости связей относительно обобщенных координат $\{q^a\}$. Итак, уравнения связей и калибровочные условия в новых переменных запишутся следующим образом:

$$q^a = q^a(q^*,\ p^*);\ p_a = 0. \tag{3.185}$$

С помощью уравнений (3.185) мы можем представить все функции от канонических переменных как функции от $(q^*,\ p^*)$. Так, например, гамильтониан в редуцированном фазовом пространстве есть

$$H^*(q^*,\ p^*) = H_{(0)}\left(q^a(q^*,\ p^*),\ q^*,\ 0,\ p^*\right). \tag{3.186}$$

Эквивалентность динамики в исходном фазовом пространстве переменных $(q,\ p)$ и редуцированном фазовом пространстве основывается на том, что скобка Пуассона двух физических величин не меняется при канонических преобразованиях.

В редуцированном фазовом пространстве можно обычным образом определить через континуальный интеграл амплитуду перехода между состояниями, соответствующими моментам времени t и t':

$$< q^{*i}(t'),\ p^*_i(t')\,|\,q^{*i}(t),\ p^*_i(t) > = \int \exp\left[i\int\left(p^*_i\dot{q}^{*i} - H^*(q^*,\ p^*)\right)d\tau\right]\times$$

$$\times \prod_{\tau, i} \frac{1}{2\pi} dq^{*i}(\tau) dp_i^*(\tau). \tag{3.187}$$

По Фаддееву и Попову, континуальный интеграл в исходном фазовом пространстве для системы со связями должен быть определен таким образом, чтобы он был эквивалентен интегралу (3.187). Иными словами, Фаддеев и Попов использовали эквивалентность обобщенной гамильтоновой динамики системы со связями и формализма редуцированного фазового пространства в качестве критерия при построении континуального интеграла. Справедливости ради нужно заметить, что, хотя эквивалентность классических теорий в обычном и редуцированном фазовых пространствах всегда имеет место, из этого с необходимостью не следует эквивалентность соответствующих квантовых теорий.

Основное утверждение состоит в том, что амплитуда перехода между начальным и конечным состоянием рассматриваемой системы дается континуальным интегралом

$$< q^A(t'),\ p_A(t') \,|\, q^A(t),\ p_A(t) > = \int \exp\left[i \int \left(p_A \dot{q}^A - H_{(0)} \right) d\tau \right] \det \|\{\chi_a,\ \varphi_b\}\| \times$$

$$\times \prod_{\tau, a} \delta\left(\varphi_a(q,\ p)\right) \delta\left(\chi_a(q,\ p)\right) \prod_{\tau} (2\pi)^{M-n} \prod_{\tau, A} dq^A(\tau) dp_A(\tau). \tag{3.188}$$

Докажем эквивалентность (3.187) и (3.188). Для этого в интеграле (3.188) осуществим преобразование переменных (3.181) – (3.183). Получим:

$$< q^A(t'),\ p_A(t') \,|\, q^A(t),\ p_A(t) > = \int \exp\left[i \int \left(p_A \dot{q}^A - H_{(0)} \right) d\tau \right] \det \left\| \frac{\partial \varphi_a}{\partial q^b} \right\| \times$$

$$\times \prod_{\tau, a} \delta\left(\varphi_a(q,\ p)\right) \delta(p_a) \prod_{\tau} (2\pi)^{M-n} \prod_{\tau, A} dq^A(\tau) dp_A(\tau) = \int \exp\left[i \int \left(p_A \dot{q}^A - H_{(0)} \right) d\tau \right] \times$$

$$\times \prod_{\tau, a} \delta\left(q^a - q^a(q^*,\ p^*)\right) \delta(p_a) \prod_{\tau, a} dq^a(\tau) dp_a(\tau) \prod_{\tau, i} \frac{1}{2\pi} dq^{*i}(\tau) dp_i^*(\tau). \tag{3.189}$$

Интегрирование по q^a и p_a снимается δ-функциями; в результате интеграл принимает вид:

$$< q^A(t'),\ p_A(t') \,|\, q^A(t),\ p_A(t) > = \int \exp\left[i \int \left(p_i^* \dot{q}^{*i} - H^*(q^*,\ p^*) \right) d\tau \right] \times$$

$$\times \prod_{\tau, i} \frac{1}{2\pi} dq^{*i}(\tau) dp_i^*(\tau) = < q^{*i}(t'),\ p_i^*(t') \,|\, q^{*i}(t),\ p_i^*(t) >, \tag{3.190}$$

что и требовалось.

Преобразования интеграла (3.188) в точности воспроизводят процедуру разрешения связей и перехода к переменным $(q^*,\ p^*)$ редуцированного фазового пространства от переменных $(q,\ p)$.

Докажем независимость континуального интеграла (3.188) от выбора калибровочных условий $\{\chi_a\}$. Выполним в интеграле (3.188) преобразование переменных $(q,\ p)$, генерируемое линейной комбинацией связей $\{\varphi_a\}$ с бесконечно малыми параметрами θ^a. Результатом этого преобразования будет бесконечно малое изменение калибровочных условий

$$\chi'_a = \chi_a + \delta\chi_a = \chi_a + \{\chi_a,\ \varphi_b\}\theta^b. \tag{3.191}$$

Вначале докажем инвариантность действия (3.173) при этих преобразованиях:

$$\delta p_A = \{p_A,\ \varphi_a\}\theta^a;\ \delta q^A = \{q^A,\ \varphi_a\}\theta^a; \tag{3.192}$$

$$\begin{aligned}\delta\left(p_A\dot{q}^A\right) &= \delta p_A\dot{q}^A - \dot{p}_A\delta q^A = \{p_A,\ \varphi_a\}\dot{q}^A\theta^a - \{q^A,\ \varphi_a\}\dot{p}_A\theta^a = \\ &= -\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial q^A}\dot{q}^A - \frac{\partial\varphi_a}{\partial p_A}\dot{p}_A\right)\theta^a = -\dot{\varphi}_a\theta^a = 0\end{aligned} \tag{3.193}$$

в силу сохранения связей во времени. Гамильтониан $H_{(0)}$ мы считаем калибровочно-инвариантной наблюдаемой величиной, удовлетворяющей соотношениям

$$\{H_{(0)},\ \varphi_a\} = d_a^b\varphi_b, \tag{3.194}$$

так что на поверхности связей

$$\delta H_{(0)} = 0. \tag{3.195}$$

Тем самым доказана инвариантность действия (3.173), и остается доказать лишь инвариантность меры в интеграле (3.188).

Преобразования переменных интегрирования

$$q'^A = q^A + \delta q^A;\ p'_A = p_A + \delta p_A \tag{3.196}$$

являются каноническими с якобианом, равным 1, в чем можно убедиться непосредственным вычислением. Далее имеем:

$$\varphi'_a = \varphi_a + \delta\varphi_a = \varphi_a + \{\varphi_a,\ \varphi_b\}\theta^b = \varphi_a + C^c{}_{ab}\theta^b\varphi_c; \tag{3.197}$$

(в соответствии с соотношением (3.53)).

$$\prod_{\tau,a}\delta\left(\varphi_a + \delta\varphi_a\right) = \prod_{\tau,a}\delta\left((\delta_a^c + C^c{}_{ab}\theta^b)\varphi_c\right) = \left(\det\|\delta_a^c + C^c{}_{ab}\theta^b\|\right)^{-1}\prod_{\tau,a}\delta(\varphi_a). \tag{3.198}$$

$$\begin{aligned}\det\|\{(\chi_a + \delta\chi_a),\ (\varphi_b + \delta\varphi_b)\}\| &= \det\|(\delta_b^c + C^c{}_{bd}\theta^d)\{(\chi_a + \delta\chi_a),\ \varphi_c\}\| = \\ &= \det\|\delta_b^c + C^c{}_{bd}\theta^d\|\det\|\{(\chi_a + \delta\chi_a),\ \varphi_c\}\|.\end{aligned} \tag{3.199}$$

Подставляя эти выражения в (3.188), получим:

$$\int\exp\left[i\int\left(p_A\dot{q}^A - H_{(0)}\right)d\tau\right]\det\|\{\chi_a,\ \varphi_b\}\|\times$$

$$\times\prod_{\tau,a}\delta(\varphi_a)\delta(\chi_a)\prod_{\tau}(2\pi)^{M-n}\prod_{\tau,A}dq^A(\tau)dp_A(\tau) =$$

$$= \int \exp\left[i\int\left(p_A\dot{q}^A - H_{(0)}\right)d\tau\right]\det\|\{(\chi_a+\delta\chi_a),\ \varphi_b\}\|\times$$
$$\times\prod_{\tau,a}\delta(\varphi_a)\delta(\chi_a+\delta\chi_a)\prod_{\tau}(2\pi)^{M-n}\prod_{\tau,A}dq^A(\tau)dp_A(\tau). \qquad (3.200)$$

В результате канонического преобразования мера в интеграле (3.200) отличается от меры в интеграле (3.188) лишь заменой (3.191). Это и доказывает независимость интеграла (3.188) от выбора калибровочных условий (3.176).

Представим интеграл (3.188) в еще одной эквивалентной форме:

$$< q^A(t'),\ p_A(t')\,|\,q^A(t),\ p_A(t) > =$$
$$= \int \exp\left[i\int\left(p_A\dot{q}^A - H_{(0)} - \lambda^a\varphi_a\right)d\tau\right]\det\|\{\varphi_a,\ \chi_b\}\|\times$$
$$\times\prod_{\tau,a}\delta\left(\chi_a(q,\ p)\right)\prod_{\tau,A}\frac{1}{2\pi}dq^A(\tau)dp_A(\tau)\prod_{\tau,a}d\lambda^a(\tau). \qquad (3.201)$$

Это континуальный интеграл в гамильтоновой форме с "дираковским" гамильтонианом

$$H_{(2)} = H_{(0)} + \lambda^a\varphi_a, \qquad (3.202)$$

включающем линейную комбинацию связей. Однако, воспроизвести путем тождественных преобразований континуального интеграла (3.188) дираковскую процедуру определения лагранжевых множителей λ^a как функций переменных $(q,\ p)$, используя систему связей и калибровочных условий, не удается. Напротив, континуальный интеграл в форме (3.188), явно не содержащий чисто калибровочные степени свободы λ^a, может рассматриваться как демонстрация независимости калибровочно-инвариантной теории, основанной на интеграле (3.188), от конкретного выбора этих степеней свободы.

Описанный здесь метод Фаддеева – Попова построения континуального интеграла в гамильтоновой форме для систем со связями допускает использование только канонических калибровок (не включающих переменных λ^a). Задание в фазовом пространстве поверхности Σ с помощью системы связей и калибровок не фиксирует переменные λ^a; они остаются существенно произвольными. В этом значительное отличие от лагранжевого формализма, который допускает использование калибровок, накладываемых на калибровочные степени свободы; использование таких (неканонических) калибровок может в некоторых случаях быть эквивалентным использованию результата дираковской процедуры определения переменных λ^a как функций $(q,\ p)$.

Использование неканонических калибровок в континуальном интеграле в гамильтоновой форме возможно только в рамках специального формализма, построенного Баталиным, Фрадкиным и Вилковыским. Этот формализм, несомненно, заключает в себе больше возможностей для квантования калибровочных теорий, чем метод Фаддеева – Попова. В противоположность методу Фаддеева – Попова, где критерием является возможность исключения "лишних", "нефизических" степеней свободы, в формализме Баталина, Фрадкина и Вилковыского (БФВ) калибровочные и динамические степени свободы (λ, q и сопряженные им импульсы), а также духовые переменные рассматриваются как равноправные в так называемом расширенном фазовом пространстве. Метод БФВ мы позднее будем рассматривать подробно.

Заметим, что из соотношения (3.191) следует, что

$$\{\chi_a,\ \varphi_b\} = \frac{\delta\chi_a}{\delta\theta^b} = \hat{M}_{ab} \tag{3.203}$$

(ср. с определением оператора уравнения для остаточных преобразований (3.127) – (3.130)).

Пример для полей Янга – Миллса: кулоновская калибровка

$$\chi^a[A^b_\mu(x)] = \partial^i A^a_i = 0; \tag{3.204}$$

$$\varphi_a = -D_i p^i_a = -\partial_i p^i_a + g f_{ab}{}^c A^b_i p^i_c; \tag{3.205}$$

$$\{\chi^a(x),\ \varphi_b(x')\} = \int \frac{\delta\chi^a(x)}{\delta A^c_i(y)}\frac{\delta\varphi_b(x')}{\delta p^i_c(y)} d^3y = -\int \delta^a_c \partial^i \delta(x-y) D^c_{ib}\delta(x'-y)d^3y =$$

$$= \partial^i D^a_{ib}\delta(x-x') = \delta^a_b \partial_i\partial^i\delta(x-x') - g f^a{}_{cb}\partial^i\left(A^c_i\delta(x-x')\right) =$$

$$= \delta^a_b\partial_i\partial^i\delta(x-x') - g f^a{}_{cb} A^c_i \partial^i\delta(x-x'). \tag{3.206}$$

$\det\|\{\chi^a,\ \varphi_b\}\|$ параметризуется обычным образом:

$$\det\|\{\chi^a(x),\ \varphi_b(x')\}\| = \int\prod_{x,a} d\bar\eta_a(x) d\eta^a(x)\times$$

$$\times\exp\left(\int d^4x d^4x' \bar\eta_a(x)\{\chi^a(x),\ \varphi_b(x')\}\eta^b(x')\right). \tag{3.207}$$

В общем случае духовый член в действии зависит также от импульсов p^i_a, сопряженным компонентам A^a_i полей Янга – Миллса. Континуальный интеграл для полей Янга – Миллса в гамильтоновой форме

$$< A^a_i(\vec{x},\ t'),\ p^i_a(\vec{x},\ t')\,|\,A^a_i(\vec{x},\ t),\ p^i_a(\vec{x},\ t) >=$$

$$= \int\exp\left[i\int\left(p^i_a\dot{A}^a_i + \frac{1}{2}p^i_a p^a_i - \frac{1}{4}F^a_{ij}F^{ij}_a + A^a_0 D_i p^i_a - \right.\right.$$

$$-i\bar\eta_a\partial_i\partial^i\eta^a + ig\bar\eta_a f^a{}_{db}A^d_i\partial^i\eta^b +$$

$$\left.\left. +\lambda^a D_i p^i_a + \Lambda_a\partial^i A^a_i\right) d^4x\right]\prod_{x,a,i}\frac{1}{2\pi}dA^a_i(x)dp^i_a(x)\times$$

$$\times\prod_{x,a}\frac{1}{2\pi}d\bar\eta_a(x)d\eta^a(x)d\lambda^a(x)d\Lambda_a(x) \tag{3.208}$$

может быть приведен к лагранжевой форме в результате выполнения интегрирования по импульсам p_a^i. В самом деле, здесь мы имеем гауссов интеграл по импульсам:

$$\int \exp\left(i\int\left[\frac{1}{2}p_a^i p_i^a + p_a^i\left(\dot{A}_i^a - D_i A_0^a - D_i\lambda^a\right)\right]d^4x\right)\prod_{x,a,i}\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}dp_a^i(x) =$$

$$= \exp\left[-i\int\frac{1}{2}\left(\dot{A}_i^a - D_i A_0^a - D_i\lambda^a\right)\left(\dot{A}_a^i - D^i A_a^0 - D^i\lambda_a\right)d^4x\right]. \tag{3.209}$$

Подставляя этот результат в интеграл (3.208), делая сдвиг переменной интегрирования

$$A'^a_0 = \lambda^a + A_0^a;\ dA'^a_0(x) = d\lambda^a(x) \tag{3.210}$$

и убирая численные множители типа $\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}$ в нормировочный множитель N, приходим к амплитуде перехода, выраженной через континуальный интеграл Фаддеева – Попова в лагранжевой форме:

$$< A_\mu^a(\vec{x},\ t')\,|\,A_\mu^a(\vec{x},\ t) > = \int \exp\left(i\int\left[-\frac{1}{2}\left(\dot{A}_i^a - D_i A_0^a\right)\left(\dot{A}_a^i - D^i A_a^0\right) -\right.\right.$$

$$-\frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij} - i\bar{\eta}_a\partial_i\partial^i\eta^a + ig\bar{\eta}_a f^a{}_{db}A_i^d\partial^i\eta^b +$$

$$\left.\left.+\Lambda_a\partial^i A_i^a\right]d^4x\right)\prod_{x,a,\mu}dA_\mu^a(x)\prod_{x,a}d\bar{\eta}_a(x)d\eta^a(x)d\Lambda_a(x). \tag{3.211}$$

Проведенные выкладки демонстрируют эквивалентность континуального интеграла для полей Янга – Миллса в гамильтоновой и лагранжевой форме.

3.9. Усреднение по калибровкам. α-калибровка

Рассмотрим сумму континуальных интегралов для полей Янга – Миллса с различными калибровками. Поскольку мы предполагаем, что калибровочная инвариантность имеет место (континуальный интеграл независим от выбора калибровки), все эти интегралы с различными калибровками эквивалентны. Разделив сумму интегралов на число членов в ней, мы получим то, что можно назвать "усреднением по калибровкам". При этом, вообще говоря, от каждой орбиты калибровочной группы берется уже по нескольку представителей.

Идея "усреднения по калибровкам" допускает дальнейшее обобщение. Рассмотрим класс калибровок

$$\chi^a[A_\mu^b(x)] - C^a(x) = 0, \tag{3.212}$$

где $C^a(x)$ – некоторые произвольные функции. Произведем усреднение в континуальном интеграле Фаддеева – Попова по C^a с весовым множителем

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x C^a(x)\kappa_{ab}(x)C^b(x)\right). \tag{3.213}$$

$\kappa_{ab}(x)$ – произвольная матрица, не зависящая от полей. Имеем:

$$< A_\mu^a(\vec{x},\ t') \,|\, A_\mu^a(\vec{x},\ t) > ^{(reg)} = \int \exp\left(iS[A_\mu^a(x)]\right) \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x C^a(x)\kappa_{ab}(x)C^b(x)\right) \times$$

$$\times \det \|\hat{M}_b^a(x,\ x')\| \prod_{x,a} \delta\left(\chi^a[A_\mu^b(x)] - C^a(x)\right) \prod_{x,a} dC^a(x) \prod_x D[A_\mu^a(x)]. \tag{3.214}$$

Заметим, что $\det \|\hat{M}_b^a(x,\ x')\|$ (функционал Δ) не зависит от $C^a(x)$ и определяется только функциональной зависимостью $\chi^a[A_\mu^b(x)]$. Поэтому мы можем проинтегрировать по $dC^a(x)$:

$$< A_\mu^a(\vec{x},\ t') \,|\, A_\mu^a(\vec{x},\ t) > ^{(reg)} = \int \exp\left(iS[A_\mu^a(x)]\right) \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x \chi^a(x)\kappa_{ab}(x)\chi^b(x)\right) \times$$

$$\times \det \|\hat{M}_b^a(x,\ x')\| \prod_x D[A_\mu^a(x)]. \tag{3.215}$$

Таким образом, калибровочный член в действии есть

$$S_{(fix)} = -\frac{1}{2}\int d^4x \chi^a(x)\kappa_{ab}(x)\chi^b(x). \tag{3.216}$$

Экспонента от (3.216) выделяет на каждой орбите калибровочной группы область

$$\chi^a(x)\kappa_{ab}(x)\chi^b(x) \sim 1. \tag{3.217}$$

Положим

$$\kappa_{ab}(x) = \frac{1}{\alpha}\delta_{ab}. \tag{3.218}$$

В этом случае

$$S_{(fix)} = -\frac{1}{2\alpha}\int d^4x \left(\chi^a(x)\right)^2 \tag{3.219}$$

– так называемая α-калибровка, построенная по калибровке $\chi^a[A_\mu^b(x)]$, часто употребляемая в квантовой теории поля.

С формальной точки зрения можно утверждать, что калибровочный член в действии вида

$$S_{(fix)} = \int d^4x \lambda_c \chi^c[A_\mu^b(x)] \tag{3.220}$$

представляет собой частный случай α-калибровки при $\alpha \to 0$. Действительно, справедлива формула

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right)\right]. \tag{3.221}$$

Доказательство этой формулы очень простое:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right)dx\right] = 1, \tag{3.222}$$

поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) dx = \sqrt{2\pi\alpha}. \qquad (3.223)$$

(Сначала выполняется интегрирование, затем осуществляется переход к пределу). Следовательно,

$$\prod_{x,a} \delta\left(\chi^a[A^b_\mu(x)]\right) = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp\left[-\frac{i}{2\alpha}\int d^4x \chi_a(x)\chi^a(x)\right]\right). \qquad (3.224)$$

3.10. Функции Грина

Функции Грина считаются известными, если известен производящий функционал.

Как было показано ранее, производящий функционал для некоторого взаимодействующего поля ϕ (вообще говоря, не калибровочного) есть

$$Z[J] = \int \prod_x D[\phi(x)] \exp\left[i\int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{(int)} + J\phi\right)\right] \times$$

$$\times \left(\int \prod_x D[\phi(x)] \exp\left[i\int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{(int)}\right)\right]\right)^{-1}, \qquad (3.225)$$

$\mathcal{L}_0$ – лагранжиан свободного поля; $\mathcal{L}_{(int)}$ – лагранжиан взаимодействий.

В случае калибровочных полей мы должны исходить из эффективного действия Фаддеева – Попова, вследствие чего оператор уравнений движения $\hat{K}$ становится невырожденным, но калибровочно-зависимым, поэтому от выбора калибровки зависят и функции Грина. Мы покажем это на примере полей Янга – Миллса.

Поля Янга – Миллса представляют собой поля с самодействием, кроме того, они взаимодействуют с духовым полем.

Найдем производящий функционал для функций Грина полей Янга – Миллса. Рассмотрим α-калибровку, построенную по калибровке Лоренца. Начнем с того, что представим действие в виде:

$$S = \int d^4x \left(\mathcal{L}_{0(YM)} + \mathcal{L}_{0(ghost)} + \mathcal{L}_{(int)}\right) \qquad (3.226)$$

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a + i\bar{\eta}_a D_\mu\partial^\mu\eta^a - \frac{1}{2\alpha}\left(\partial^\mu A^a_\mu\right)^2\right] =$$

$$= \int d^4x \left[-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^a{}_{bc}A^b_\mu A^c_\nu\right)\left(\partial^\mu A^\nu_a - \partial^\nu A^\mu_a - \right.\right.$$

$$\left.\left. - gf_a{}^{de}A^\mu_d A^\nu_e\right) + i\bar{\eta}_a\partial_\mu\partial^\mu\eta^a - i\bar{\eta}_a gf^a{}_{bc}A^b_\mu\partial^\mu\eta^c - \frac{1}{2\alpha}\partial_\mu A^\mu_a\partial^\nu A^a_\nu\right] =$$

$$= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu \right) \left(\partial^\mu A^\nu_a - \partial^\nu A^\mu_a \right) - \frac{1}{2\alpha} \partial_\mu A^\mu_a \partial^\nu A^a_\nu + \right.$$

$$+ i\bar{\eta}_a \partial_\mu \partial^\mu \eta^a + \frac{1}{2} g f_a{}^{bc} \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu \right) A^\mu_b A^\nu_c -$$

$$\left. -\frac{1}{4} g^2 f^a{}_{bc} f_a{}^{de} A^b_\mu A^c_\nu A^\mu_d A^\nu_e - i\bar{\eta}_a g f^a{}_{bc} A^b_\mu \partial^\mu \eta^c \right]; \tag{3.227}$$

$$\mathcal{L}_{0(YM)} = \frac{1}{2} A^a_\mu \left(\partial_\nu \partial^\nu A^\mu_a - \partial_\nu \partial^\mu A^\nu_a \right) + \frac{1}{2\alpha} A^a_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu_a = -\frac{1}{2} A^a_\mu \hat{K}^{\mu\nu}_{ab} A^b_\nu, \tag{3.228}$$

где

$$\hat{K}^{\mu\nu}_{ab} = \delta_{ab} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \partial^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda \right]; \tag{3.229}$$

$$\mathcal{L}_{0(ghost)} = i\bar{\eta}_a \partial_\mu \partial^\mu \eta^a; \tag{3.230}$$

$$\mathcal{L}_{(int)} \left(A^a_\mu,\ \bar{\eta}_a,\ \eta^a \right) = \frac{1}{2} g f_a{}^{bc} \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu \right) A^\mu_b A^\nu_c -$$

$$-\frac{1}{4} g^2 f^a{}_{bc} f_a{}^{de} A^b_\mu A^c_\nu A^\mu_d A^\nu_e - i\bar{\eta}_a g f^a{}_{bc} A^b_\mu \partial^\mu \eta^c. \tag{3.231}$$

Теперь определим (опуская нормировочные множители):

$$Z_{0(YM)}[J^\mu_a(x)] = \int \prod_x D[A^a_\mu(x)] \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2} A^a_\mu \hat{K}^{\mu\nu}_{ab} A^b_\nu + J^\mu_a A^a_\mu \right) \right]; \tag{3.232}$$

$$Z_{0(ghost)}[\bar{\xi}_a(x),\ \xi^a(x)] = \int \prod_{x,a} d\bar{\eta}_a(x) d\eta^a(x) \times$$

$$\times \exp \left[i \int d^4x \left(i\bar{\eta}_a \partial_\mu \partial^\mu \eta^a + \bar{\xi}_a \eta^a + \bar{\eta}_a \xi^a \right) \right]. \tag{3.233}$$

И, наконец,

$$Z[J^\mu_a(x),\ \bar{\xi}_a(x),\ \xi^a(x)] = \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{(int)} \left(\frac{\delta}{i\delta J^\mu_a(x)},\ \frac{\delta}{i\delta \bar{\xi}_a(x)},\ \frac{\delta}{i\delta \xi^a(x)} \right) \right] \times$$

$$\times Z_{0(YM)}[J^\mu_a(x)] Z_{0(ghost)}[\bar{\xi}_a(x),\ \xi^a(x)]. \tag{3.234}$$

$$Z_{0(YM)}[J^\mu_a(x)] = \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu_a(x) G^{(0)ab}_{\ \mu\nu}(x,\ y) J^\nu_b(y) \right] \tag{3.235}$$

Пропагатор поля Янга – Миллса удовлетворяет уравнению

$$\int d^4x' \hat{K}^{\mu\lambda}_{ac}(x - x') G^{(0)cb}_{\ \lambda\nu}(x' - y) = \delta^\mu_\nu \delta^b_a \delta(x - y) \tag{3.236}$$

Для того, чтобы найти явный вид этого пропагатора, заметим, что в импульсном пространстве оператор $\hat{K}^{\mu\nu}_{ab}$ примет вид:

$$K^{\mu\nu}_{ab}(k) = -\delta_{ab}\left[\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}k_\lambda k^\lambda\right]. \tag{3.237}$$

Оператор, обратный ему, ищем в виде

$$G^{(0)ab}_{\ \ \mu\nu}(k) = \delta^{ab}\left[A(k)g_{\mu\nu} + B(k)k_\mu k_\nu\right]. \tag{3.238}$$

Тогда

$$\begin{aligned}-\delta_{ac}&\left[\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k^\mu k^\lambda - g^{\mu\lambda}k_\rho k^\rho\right]\delta^{cb}\left[A(k)g_{\lambda\nu} + B(k)k_\lambda k_\nu\right] =\\ &= -\delta^b_a\left[\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)A(k)k^\mu k_\nu - A(k)k_\rho k^\rho\delta^\mu_\nu +\right.\\ &\left.+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)B(k)k^\lambda k_\lambda k^\mu k_\nu - B(k)k_\rho k^\rho k^\mu k_\nu\right] = \delta^b_a\delta^\mu_\nu,\end{aligned} \tag{3.239}$$

откуда получается два уравнения:

$$A(k)k^2 = 1; \tag{3.240}$$

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)A(k) - \frac{1}{\alpha}B(k)k^2 = 0; \tag{3.241}$$

так что

$$A(k) = \frac{1}{k^2};\ B(k) = (\alpha-1)\frac{1}{k^4}; \tag{3.242}$$

$$G^{(0)ab}_{\ \ \mu\nu}(k) = \delta^{ab}\left[\frac{1}{k^2}g_{\mu\nu} + (\alpha-1)\frac{1}{k^4}k_\mu k_\nu\right]; \tag{3.243}$$

$$G^{(0)ab}_{\ \ \mu\nu}(x-y) = \delta^{ab}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{-ik(x-y)}\frac{1}{k^2}\left[g_{\mu\nu} + (\alpha-1)\frac{1}{k^2}k_\mu k_\nu\right]. \tag{3.244}$$

Попутно отметим, что при отсутствии члена, фиксирующего калибровку, вместо уравнения (3.239) мы получили бы уравнение

$$-\delta^b_a\left(A(k)k^\mu k_\nu - A(k)k_\rho k^\rho\delta^\mu_\nu\right) = \delta^b_a\delta^\mu_\nu, \tag{3.245}$$

которое не имеет решения, и следовательно, оператор $\hat{K}^{\mu\nu}_{ab}$ вырожденной теории не имеет обратного, о чем уже говорилось ранее.

Найдем пропагатор духов Фаддеева – Попова.

$$\mathcal{L}_{0(ghost)} = -\bar{\eta}_a\hat{K}^a_b\eta^b; \tag{3.246}$$

$$\hat{K}^a_b = -i\delta^a_b\partial_\mu\partial^\mu;\ K^a_b(p) = i\delta^a_b p^2; \tag{3.247}$$

$$G^{(0)b}{}_a(p) = -i\delta^b_a \frac{1}{p^2}; \tag{3.248}$$

$$G^{(0)b}{}_a(x-y) = -i\delta^b_a \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2}. \tag{3.249}$$

Иной вид принимают пропагаторы при использовании других калибровок. Для примера рассмотрим так называемую аксиальную калибровку

$$t^\mu A^a_\mu = 0, \tag{3.250}$$

где t^μ – пространственноподобный вектор,

$$t^\mu t_\mu = -1. \tag{3.251}$$

Калибровочный член в действии теперь будет иметь вид

$$S_{(fix)} = -\int d^4 x \frac{1}{2\alpha} \left(t^\mu A^a_\mu\right)^2. \tag{3.252}$$

В результате оператор $\hat{K}^{\mu\nu}_{ab}$ в выражении (3.229) изменится следующим образом:

$$\hat{K}'^{\mu\nu}_{ab} = \delta_{ab} \left(\partial^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda + \frac{1}{\alpha} t^\mu t^\nu\right), \tag{3.253}$$

или, в импульсном пространстве,

$$\hat{K}'^{\mu\nu}_{ab}(k) = -\delta_{ab} \left(k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k_\lambda k^\lambda - \frac{1}{\alpha} t^\mu t^\nu\right). \tag{3.254}$$

Пропагатор ищем в виде

$$G'^{(0)ab}_{\mu\nu}(k) = \delta^{ab} \left[A'(k) g_{\mu\nu} + B'(k) k_\mu k_\nu + C'(k) \left(k_\mu t_\nu + t_\mu k_\nu\right)\right]; \tag{3.255}$$

$$-\delta_{ac} \left[k^\mu k^\lambda - g^{\mu\lambda} k_\rho k^\rho - \frac{1}{\alpha} t^\mu t^\lambda\right] \delta^{cb} \left[A'(k) g_{\lambda\nu} + B'(k) k_\lambda k_\nu + C'(k) \left(k_\lambda t_\nu + t_\lambda k_\nu\right)\right] =$$
$$= -\delta^b_a \Big[A'(k) k^\mu k_\nu - A'(k) k^2 \delta^\mu_\nu - \frac{1}{\alpha} A'(k) t^\mu t_\nu +$$
$$+ B'(k) k^2 k^\mu k_\nu - B'(k) k^2 k^\mu k_\nu - \frac{1}{\alpha} B'(k) t^\mu k_\nu t^\lambda k_\lambda +$$
$$+ C'(k) \left(k^2 k^\mu t_\nu + k^\mu k_\nu k^\lambda t_\lambda\right) - C'(k) k^2 \left(k^\mu t_\nu + t^\mu k_\nu\right) -$$
$$- \frac{1}{\alpha} C'(k) \left(t^\mu t_\nu t^\lambda k_\lambda + t^\mu k_\nu t^2\right)\Big] = \delta^b_a \delta^\mu_\nu; \tag{3.256}$$

Из (3.256) получаем три уравнения

$$A'(k) = \frac{1}{k^2}; \tag{3.257}$$

$$A'(k) + (k,\ t)C'(k) = 0; \tag{3.258}$$

$$\frac{1}{\alpha}(k,\ t)B'(k) + C'(k)k^2 + \frac{1}{\alpha}C'(k)t^2 = 0, \tag{3.259}$$

откуда

$$C'(k) = -\frac{1}{k^2(k,\ t)}; \tag{3.260}$$

$$B'(k) = -\frac{\alpha}{(k,\ t)}\left(k^2 + \frac{t^2}{\alpha}\right)C'(k) = \frac{\alpha k^2 + t^2}{k^2(k,\ t)^2}; \tag{3.261}$$

$$G'^{(0)ab}_{\mu\nu}(x-y) = \delta^{ab}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{-ik(x-y)}\frac{1}{k^2}\left[g_{\mu\nu} + \frac{\alpha k^2 + t^2}{(k,\ t)^2}k_\mu k_\nu - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{(k,\ t)}\left(k_\mu t_\nu + t_\mu k_\nu\right)\right]. \tag{3.262}$$

Пропагатор поля Янга – Миллса имеет довольно сложный вид, зато упрощается выражение для производящего функционала. Определим духовое действие:

$$\delta f^a[A^b_\mu(x)] = \frac{\delta f^a}{\delta A^b_\mu}\delta A^b_\mu = t^\mu\left(\partial_\mu\theta^a - gf^a{}_{bc}A^b_\mu\theta^c\right) = t^\mu\partial_\mu\theta^a, \tag{3.263}$$

где мы воспользовались калибровкой (3.250). Поэтому духовый член в действии

$$S_{(ghost)} = \int d^4x\mathcal{L}_{0(ghost)} = -\int d^4xi\bar{\eta}_a t^\mu\partial_\mu\eta^a. \tag{3.264}$$

Калибровка (3.250) интересна тем, что духовый сектор в континуальном интеграле отфакторизовывается, подобно тому, как это имеет место в электродинамике – в лагранжиане отсутствует член, описывающий взаимодействие духов с калибровочным полем. Поэтому производящий функционал для функций Грина в данном случае определяется формулой

$$Z[J^\mu_a(x)] = \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_{(int)}\left(\frac{\delta}{i\delta J^\mu_a(x)}\right)\right]Z_{0(YM)}[J^\mu_a(x)], \tag{3.265}$$

где $\mathcal{L}_{(int)}$ – это лагранжиан самодействия поля Янга – Миллса,

$$\mathcal{L}_{(int)}(A^a_\mu) = \frac{1}{2}gf_a{}^{bc}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right)A^\mu_b A^\nu_c - \frac{1}{4}g^2 f^a{}_{bc}f_a{}^{de}A^b_\mu A^c_\nu A^\mu_d A^\nu_e, \tag{3.266}$$

а $Z_{0(YM)}[J^\mu_a(x)]$ задается формулой (3.232) с оператором $\hat{K}'^{\mu\nu}_{ab}$ (3.253).

3.11. БРСТ-преобразования

Лагранжиан поля Янга – Миллса является калибровочно- инвариантным, но эффективный лагранжиан Фаддеева – Попова уже не является таковым – калибровочная инвариантность нарушена наложением калибровки. Выяснилось, однако, что эффективный лагранжиан Фаддеева – Попова

$$\mathcal{L}_{(eff)} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a - i\bar{\eta}_a\frac{\delta\chi_a}{\delta\theta^b}\eta^b + \lambda_a\chi^a \tag{3.267}$$

обладает остаточной симметрией относительно преобразований

$$\delta A^a_\mu = D_\mu\eta^a\bar{\varepsilon}; \tag{3.268}$$

$$\delta\eta^a = -\frac{1}{2}gf^a{}_{bc}\eta^b\eta^c\bar{\varepsilon}; \tag{3.269}$$

$$\delta\bar{\eta}_a = i\lambda_a\bar{\varepsilon}; \tag{3.270}$$

$$\delta\lambda_a = 0. \tag{3.271}$$

Симметрия относительно преобразований (3.268) – (3.271) впервые была обнаружена Бекки, Руэ, Сторой и Тютиным, поэтому преобразования (3.268) – (3.271) носят название БРСТ-преобразований. В отличие от калибровочной симметрии, БРСТ-симметрия является глобальной; параметр инфинитезимальных преобразований $\bar{\varepsilon}$ – грассманова константа, не зависящая от x. Заметим, что грассманов характер параметра $\bar{\varepsilon}$ обеспечивает сохранение грассмановой четности при преобразованиях (3.268) – (3.271).

Преобразования поля Янга – Миллса (3.268) – это калибровочные преобразования с параметром

$$\theta^a = \eta^a\bar{\varepsilon}. \tag{3.272}$$

Поэтому очевидно, что лагранжиан поля Янга – Миллса инвариантен относительно БРСТ-преобразований. Нам остается убедиться, что при преобразованиях (3.268) – (3.271)

$$\delta\left(-i\bar{\eta}_a\frac{\delta\chi^a}{\delta\theta^b}\eta^b + \lambda_a\chi^a\right) = 0. \tag{3.273}$$

$$-i\delta\bar{\eta}_a\frac{\delta\chi^a}{\delta\theta^b}\eta^b - i\bar{\eta}_a\delta\left(\frac{\delta\chi^a}{\delta A^c_\mu}\frac{\delta A^c_\mu}{\delta\theta^b}\eta^b\right) + \delta\lambda_a\chi^a + \lambda_a\frac{\delta\chi^a}{\delta A^b_\mu}\frac{\delta A^b_\mu}{\delta\theta^c}\theta^c =$$

$$= \lambda_a\bar{\varepsilon}\frac{\delta\chi^a}{\delta\theta^b}\eta^b - i\bar{\eta}_a\frac{\delta^2\chi^a}{\delta A^c_\mu\delta A^d_\nu}\delta A^d_\nu\frac{\delta A^c_\mu}{\delta\theta^b}\eta^b - i\bar{\eta}_a\frac{\delta\chi^a}{\delta A^c_\mu}\delta\left(\frac{\delta A^c_\mu}{\delta\theta^b}\eta^b\right) + \lambda_a\frac{\delta\chi^a}{\delta\theta^b}\eta^b\bar{\varepsilon}. \tag{3.274}$$

Первый и последний члены взаимно уничтожаются; рассмотрим второй член:

$$i\bar{\eta}_a\frac{\delta^2\chi^a}{\delta A^c_\mu\delta A^d_\nu}D_\nu\eta^d\bar{\varepsilon}\frac{\delta A^c_\mu}{\delta\theta^b}\eta^b = -i\bar{\eta}_a\frac{\delta^2\chi^a}{\delta A^c_\mu\delta A^d_\nu}D_\nu\eta^d D_\mu\eta^c\bar{\varepsilon} = 0. \tag{3.275}$$

Величина $\dfrac{\delta^2\chi^a}{\delta A^c_\mu \delta A^d_\nu}$ симметрична по индексам $(c,\ d)$ (или $(\mu,\ \nu)$), в то время как выражение $\left(D_\nu\eta^d D_\mu\eta^c\right)$ антисимметрично по этим индексам (в силу грассманова характера величин η^a), поэтому второй член обращается в 0. Покажем, наконец, что третий член в (3.274) также равен нулю.

$$\delta\left(\frac{\delta A^a_\mu}{\delta\theta^b}\eta^b\right) = \delta\left(D_\mu\eta^a\right) = \delta\left(\partial_\mu\eta^a - gf^a{}_{bc}A^b_\mu\eta^c\right) = \partial_\mu\delta\eta^a - gf^a{}_{bc}\delta A^b_\mu\eta^c - gf^a{}_{bc}A^b_\mu\delta\eta^c =$$

$$= -\frac{1}{2}gf^a{}_{bc}\partial_\mu\eta^b\eta^c\bar\varepsilon - \frac{1}{2}gf^a{}_{bc}\eta^b\partial_\mu\eta^c\bar\varepsilon -$$

$$-gf^a{}_{bc}D_\mu\eta^b\bar\varepsilon\eta^c + \frac{1}{2}g^2f^a{}_{bc}f^c{}_{de}A^b_\mu\eta^d\eta^e\bar\varepsilon. \tag{3.276}$$

Заметим, что

$$f^a{}_{bc}\eta^b\partial_\mu\eta^c = -f^a{}_{bc}\partial_\mu\eta^c\eta^b = -f^a{}_{cb}\partial_\mu\eta^b\eta^c = f^a{}_{bc}\partial_\mu\eta^b\eta^c, \tag{3.277}$$

так что члены первого порядка по g в (3.276) уничтожаются. Остаются члены второго порядка по g, которые также уходят в силу тождества Якоби для структурных констант:

$$-g^2f^a{}_{bc}f^b{}_{de}A^d_\mu\eta^e\eta^c\bar\varepsilon + \frac{1}{2}g^2f^a{}_{bc}f^c{}_{de}A^b_\mu\eta^d\eta^e\bar\varepsilon =$$

$$= \frac{1}{2}g^2\left(f^a{}_{bc}f^c{}_{de} - f^a{}_{ce}f^c{}_{bd} + f^a{}_{cd}f^c{}_{be}\right)A^b_\mu\eta^d\eta^e\bar\varepsilon =$$

$$= \frac{1}{2}g^2\left(f^a{}_{bc}f^c{}_{de} + f^a{}_{ec}f^c{}_{bd} + f^a{}_{dc}f^c{}_{eb}\right)A^b_\mu\eta^d\eta^e\bar\varepsilon = 0. \tag{3.278}$$

Тем самым доказана инвариантность эффективного лагранжиана, а также эффективного действия: поскольку преобразования являются глобальными, элемент 4-объема d^4x остается неизменным. Если в континуальном интеграле с эффективным действием Фаддеева – Попова мера калибровочно-инвариантна, сам континуальный интеграл инвариантен относительно БРСТ-преобразований.

Для материальных полей БРСТ-преобразования – это калибровочные преобразования с параметром (3.272):

$$\delta\psi = ig\hat{T}_a\eta^a\bar\varepsilon\psi. \tag{3.279}$$

Инвариантность лагранжиана материальных полей при этих преобразованиях очевидна.

Характерная особенность БРСТ-преобразований – их нильпотентность: вторая вариация величины B, подвергающейся преобразованию, равна 0:

$$\delta^2 B = 0. \tag{3.280}$$

Действительно, для поля Янга – Миллса

$$\delta^2 A^a_\mu = \delta\left(D_\mu\eta^a\right)\bar\varepsilon = 0, \tag{3.281}$$

как следует из (3.276) – (3.278). Для полей η^a, $\bar\eta_a$:

$$\delta^2\eta^a = -\frac{1}{2}gf^a{}_{bc}\left(\delta\eta^b\eta^c + \eta^b\delta\eta^c\right)\bar\varepsilon =$$

$$= -\frac{1}{2}gf^a{}_{bc}\left(\delta\eta^b\eta^c - \delta\eta^c\eta^b\right)\bar\varepsilon = -gf^a{}_{bc}\delta\eta^b\eta^c\bar\varepsilon = \frac{1}{2}g^2f^a{}_{bc}f^b{}_{de}\eta^d\eta^e\eta^c\bar\varepsilon\bar\xi =$$

$$= \frac{1}{6}g^2f^a{}_{bc}f^b{}_{de}\left(\eta^d\eta^e\eta^c + \eta^c\eta^d\eta^e + \eta^e\eta^c\eta^d\right)\bar\varepsilon\bar\xi =$$

$$= \frac{1}{6}g^2\left(f^a{}_{bc}f^b{}_{de} + f^a{}_{be}f^b{}_{cd} + f^a{}_{bd}f^b{}_{ec}\right)\eta^d\eta^e\eta^c\bar\varepsilon\bar\xi = 0 \qquad (3.282)$$

в силу тождеств Якоби;

$$\delta^2\bar\eta_a = i\delta\lambda_a\bar\varepsilon = 0. \qquad (3.283)$$

Очевидно также, что

$$\delta^2\lambda_a = 0. \qquad (3.284)$$

Наконец, для материальных полей:

$$\delta^2\psi = ig\hat T_a\delta\eta^a\bar\varepsilon\psi + ig\hat T_a\eta^a\bar\varepsilon\delta\psi = -\frac{i}{2}g^2f^a{}_{bc}\hat T_a\eta^b\eta^c\bar\xi\bar\varepsilon\psi - g^2\hat T_a\eta^a\bar\varepsilon\hat T_b\eta^b\bar\xi\psi =$$

$$= -\frac{i}{2}g^2f^a{}_{bc}\hat T_a\eta^b\eta^c\bar\xi\bar\varepsilon\psi - \frac{1}{2}g^2\left(\hat T_b\hat T_c - \hat T_c\hat T_b\right)\eta^b\eta^c\bar\xi\bar\varepsilon\psi = 0, \qquad (3.285)$$

как следует из соотношения (3.81) для генераторов $\hat T_a$.

Преобразования (3.268) – (3.271), (3.279) – это БРСТ-преобразования в лагранжевой форме. Имея в виду, что в ряде случаев оказывается предпочтительнее гамильтонов формализм, эти преобразования можно дополнить преобразованиями для импульсов, сопряженных A^a_μ, η^a, $\bar\eta_a$, ψ. Это будет сделано позднее в нашем курсе. Для БРСТ-преобразований в фазовом пространстве переменных A^a_μ, η^a, $\bar\eta_a$, ψ и сопряженных им импульсов можно построить генератор Ω, такой, что

$$\delta B = \{B,\ \Omega\}\bar\varepsilon. \qquad (3.286)$$

Этот генератор оказывается нильпотентным, т. е.

$$\{\Omega,\ \Omega\} = 0. \qquad (3.287)$$

Действительно, нильпотентность преобразований

$$\delta^2 B = \{\{B,\ \Omega\},\ \Omega\}\bar\varepsilon\bar\xi = 0 \qquad (3.288)$$

предполагает выполнение равенства (3.287) (используется тождество Якоби для скобок Пуассона).

БРСТ-инвариантность находит очень широкое применение в квантовой теории поля. В частности, использование БРСТ-инвариантности предоставляет наиболее легкий путь для вывода тождеств, которые связывают функции Грина и так называемые вершинные функции различных порядков для калибровочных полей. (В электродинамике эти тождества называются тождествами Уорда, в теории полей Янга – Миллса – тождествами Славнова – Тейлора.) Эти тождества играют решающую роль в доказательстве перенормируемости калибровочных теорий. Связь между функциями Грина и вершинными функциями различных порядков приводит к тому, что устранение расходимостей в низших порядках теории возмущений обеспечивает их устранение во всех порядках.

Хотя в задачу нашего курса не входит изучение вопросов перенормируемости, мы, тем не менее, рассмотрим вывод тождеств Славнова – Тейлора как следствие БРСТ-симметрии производящего функционала, демонстрируя тем самым важную роль БРСТ-преобразований. Требование БРСТ-инвариантности положено также в основу специального метода построения континуального интеграла, предложенного Баталиным, Фрадкиным и Вилковыским; в их подходе БРСТ-симметрия используется для доказательства независимости континуального интеграла от выбора калибровочного условия.

БРСТ-инвариантность восполняет потерю калибровочной инвариантности вследствие введения в действие члена, фиксирующего калибровку. Постепенно выясняется, как это часто бывает при развитии науки, что БРСТ-симметрия – не просто математический факт; ее использование открывает новые (и, с математической точки зрения, более последовательные) возможности квантования калибровочных теорий.

3.12. Тождества Уорда

Итак, мы видели на примере пропагатора поля Янга – Миллса, что функции Грина являются калибровочно-зависимыми. Однако мы хотим иметь калибровочно-инвариантную теорию, мы хотим, чтобы физические следствия теории, выраженные через функции Грина, не зависели от выбора калибровки. Напомним, что зависимость от калибровки функций Грина является следствием калибровочной неинвариантности эффективного действия Фаддеева – Попова. Мы можем потребовать, чтобы производящий функционал для функций Грина оставался калибровочно-инвариантным, несмотря на неинвариантность эффективного действия. Как мы увидим, это приведет к искомым соотношениям между функциями Грина, справедливыми во всех порядках теории возмущений и обеспечивающими перенормируемость калибровочных теорий.

Вначале обратимся к случаю спинорной электродинамики, производящий функционал для которой есть

$$Z[J^\mu(x),\ \bar{j}(x),\ j(x)] = N \int \prod_x D[A_\mu(x)] D[\bar\psi(x)] D[\psi(x)] \prod_x d\lambda(x) \times$$
$$\times \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar\psi\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - \right.\right.$$
$$\left.\left. - m\bar\psi\psi + \lambda\chi[A_\mu] + J^\mu A_\mu + \bar{j}\psi + \bar\psi j \right)\right], \tag{3.289}$$

где введены источники J^μ, $\bar{j}$, j для электромагнитного и спинорных полей соответственно. Поскольку духи не взаимодействуют с электромагнитным и спинорным полями, их вклад включен в нормировочный множитель.

Подвергнем электромагнитное и спинорное поле инфинитезимальному калибровочному преобразованию, которое имеет вид:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta; \tag{3.290}$$

$$\psi' = \psi + ie\theta\psi; \; \bar{\psi}' = \bar{\psi} - ie\theta\bar{\psi}. \tag{3.291}$$

Покажем, что якобиан этого преобразования равен 1. Отличны от 0 только диагональные элементы матрицы преобразования:

$$\frac{\delta A'_\mu(x)}{\delta A_\nu(y)} = \delta^\nu_\mu \delta(x-y); \tag{3.292}$$

$$\frac{\delta\psi'(x)}{\delta\psi(y)} = \delta(x-y)(1+ie\theta); \tag{3.293}$$

$$\frac{\delta\bar{\psi}'(x)}{\delta\bar{\psi}(y)} = \delta(x-y)(1-ie\theta). \tag{3.294}$$

$$\hat{J} = \delta(x-y)\begin{pmatrix} \delta^\nu_\mu & 0 & 0 \\ 0 & (1+ie\theta) & 0 \\ 0 & 0 & (1-ie\theta) \end{pmatrix}; \tag{3.295}$$

$$J = \det \|\hat{J}\| = 1. \tag{3.296}$$

В эффективном лагранжиане калибровочно-неинвариантны только член, фиксирующий калибровку, и члены, содержащие источники. Поэтому

$$\delta\mathcal{L}_{(eff)}\left(A_\mu,\, \bar{\psi},\, \psi\right) = \lambda\frac{\delta\chi}{\delta A_\mu}\frac{\delta A_\mu}{\delta\theta}\theta + J^\mu\delta A_\mu + \bar{j}\delta\psi + \delta\bar{\psi}j =$$

$$= \lambda\hat{M}[A_\mu]\theta + J^\mu\partial_\mu\theta + ie\theta\left(\bar{j}\psi - \bar{\psi}j\right) = \left[\hat{M}^+[A_\mu]\lambda - \partial_\mu J^\mu + ie\left(\bar{j}\psi - \bar{\psi}j\right)\right]\theta. \tag{3.297}$$

Здесь $\hat{M}^+[A_\mu]$ – оператор, эрмитово-сопряженный оператору Фаддеева – Попова $\hat{M}[A_\mu]$.

Результат калибровочного преобразования производящего функционала (3.289) можно представить в виде:

$$\int\prod_x D[A_\mu(x)]D[\bar{\psi}(x)]D[\psi(x)]\prod_x d\lambda(x)\times$$

$$\times\exp\left(i\int d^4x\left[\mathcal{L}_{(eff)}\left(A_\mu,\, \bar{\psi},\, \psi\right) + \delta\mathcal{L}_{(eff)}\left(A_\mu,\, \bar{\psi},\, \psi\right)\right]\right) =$$

$$= \exp\left[i\int d^4x\delta\mathcal{L}_{(eff)}\left(\frac{\delta}{i\delta J^\mu},\, \frac{\delta}{i\delta\bar{j}},\, \frac{\delta}{i\delta j}\right)\right] Z[J^\mu(x),\, \bar{j}(x),\, j(x)]. \tag{3.298}$$

Поскольку θ – малый параметр, $\exp\left(i\int d^4x\delta\mathcal{L}_{(eff)}\right)$ можно разложить в ряд, переписав (3.298) следующим образом:

$$Z[J^\mu(x),\ \bar{j}(x),\ j(x)] + i\int d^4x \left[\hat{M}^+\left(\frac{\delta}{i\delta J^\mu}\right)\lambda - \partial_\mu J^\mu + \right.$$

$$\left. + ie\left(\bar{j}\frac{\delta}{i\delta\bar{j}} - j\frac{\delta}{i\delta j}\right)\right]\theta Z[J^\mu(x),\ \bar{j}(x),\ j(x)] = Z[J^\mu(x),\ \bar{j}(x),\ j(x)]. \qquad (3.299)$$

В соответствии с нашим предположением калибровочное преобразование на должно изменять функционала Z, так что из (3.299) следует дифференциальное уравнение для Z:

$$\hat{M}^+\left(\frac{\delta}{i\delta J^\mu}\right)\lambda Z - \partial_\mu J^\mu Z + e\left(\bar{j}\frac{\delta Z}{\delta\bar{j}} - j\frac{\delta Z}{\delta j}\right) = 0. \qquad (3.300)$$

Это основное уравнение для вывода тождеств Уорда.

Чтобы придать тождествам Уорда конкретную форму, введем функционал W, положив

$$Z[J^\mu(x),\ \bar{j}(x),\ j(x)] = \exp\left(iW[J^\mu(x),\ \bar{j}(x),\ j(x)]\right). \qquad (3.301)$$

Как было показано ранее, функционал W есть производящий функционал для связных функций Грина; он удовлетворяет уравнению

$$\hat{M}^+\left(\frac{\delta}{\delta J^\mu}\right)\lambda W - \partial_\mu J^\mu W + ie\left(\bar{j}\frac{\delta W}{\delta\bar{j}} - j\frac{\delta W}{\delta j}\right) = 0. \qquad (3.302)$$

Далее, введем функционал Γ, определяемый равенством

$$\Gamma[A_\mu(x),\ \bar{\psi}(x),\ \psi(x)] = W[J^\mu(x),\ \bar{j}(x),\ j(x)] - \int d^4x\left(J^\mu A_\mu + \bar{j}\psi + \bar{\psi}j\right). \qquad (3.303)$$

(преобразование Лежандра).

Для функционалов W, Γ справедливы соотношения:

$$\frac{\delta W}{\delta J^\mu} = A^\mu;\ \frac{\delta W}{\delta\bar{j}} = \psi;\ \frac{\delta W}{\delta j} = \bar{\psi}; \qquad (3.304)$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} = -J^\mu;\ \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} = -\bar{j};\ \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}} = -j. \qquad (3.305)$$

Используя их, перепишем уравнение (3.302) в виде:

$$\hat{M}^+[A^\mu]\lambda + \partial_\mu\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu}\right) - ie\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\psi - \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}}\bar{\psi}\right) = 0. \qquad (3.306)$$

Возьмем вторую вариационную производную от этого уравнения по $\bar{\psi}(z)\psi(y)$. Первый член обращается в 0;

$$\frac{\delta}{\delta\psi(y)}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}\psi(x)\right) = \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(y)\delta\psi(x)}\psi(x) + \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}\delta(x-y); \qquad (3.307)$$

$$\frac{\delta^2}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(y)}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}\psi(x)\right)=\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(y)\delta\psi(x)}\psi(x)+$$

$$+\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(x)}\delta(x-y); \tag{3.308}$$

$$\frac{\delta}{\delta\psi(y)}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)}\bar{\psi}(x)\right)=\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}\bar{\psi}(x); \tag{3.309}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(y)}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)}\bar{\psi}(x)\right)=\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}\bar{\psi}(x)+$$

$$+\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}\delta(x-z). \tag{3.310}$$

Подставим это в уравнение и положим

$$A_\mu=0;\ \bar{\psi}=0;\ \psi=0. \tag{3.311}$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(y)\delta A_\mu(x)}\right)=ie\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(x)}\delta(x-y)-$$

$$-ie\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}\delta(x-z). \tag{3.312}$$

Выясним смысл величин, входящих в уравнение (3.312). Величина $\dfrac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}$ представляет собой обратный электронный пропагатор, как нетрудно убедиться, используя соотношения (3.304) – (3.305):

$$\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)}=D^{-1}(x,\ y); \tag{3.313}$$

$$\int d^4zD(x,\ z)D^{-1}(z,\ y)=-\int d^4z\frac{\delta^2W[0]}{\delta\bar{j}(x)\delta j(z)}\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(y)}=$$

$$=\int d^4z\frac{\delta\psi(x)}{\delta j(z)}\frac{\delta j(z)}{\delta\psi(y)}=\delta(x-y). \tag{3.314}$$

Величина $\dfrac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(y)\delta A_\mu(x)}$ представляет собой так называемую вершинную функцию

$$\Gamma^\mu(x,\ y,\ z)=\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\bar{\psi}(z)\delta\psi(y)\delta A_\mu(x)}, \tag{3.315}$$

первый член ее разложения по теории возмущений дает вершину взаимодействия спинорной электродинамики

$$\mathcal{L}_{(int)}=e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \tag{3.316}$$

сам же функционал Γ (3.303) является производящим функционалом для вершинных функций.

Таким образом, уравнение (3.312) примет вид:

$$\partial_\mu \Gamma^\mu(x,\ y,\ z) = ieD^{-1}(z,\ x)\delta(x-y) - ieD^{-1}(x,\ y)\delta(x-z) \tag{3.317}$$

Это и есть искомое соотношение между вершинной функцией и обратными пропагаторами в спинорной электродинамике, справедливое во всех порядках теории возмущений, используемое (в импульсном представлении) в доказательстве перенормируемости этой теории.

3.13. Тождества Славнова – Тейлора

Для полей Янга – Миллса ситуация усложняется, и мы ограничимся лишь выводом аналога уравнения (3.300). Как уже говорилось, наиболее простой способ вывода тождеств Славнова – Тейлора (обобщенных тождеств Уорда) заключается в использовании БРСТ-инвариантности специальным образом построенного производящего функционала.

Итак, введем функционал

$$\begin{gathered}
\tilde{Z}[J^\mu_a(x),\ \bar{j}(x),\ j(x),\ \bar{\xi}_a(x),\ \xi^a(x),\ u^\mu_a(x),\ v_a(x),\ \bar{s}(x),\ s(x)] = \\
= N\int \prod_x D[A^a_\mu(x)]D[\bar{\psi}(x)]D[\psi(x)]\prod_{x,a} d\bar{\eta}_a(x)d\eta^a(x)d\lambda_a(x)\times \\
\times \exp\left[i\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a + i\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \right.\right. \\
-i\bar{\eta}_a\frac{\delta\chi_a}{\delta\theta^b}\eta^b + \lambda_a\chi^a[A^b_\mu] + J^\mu_a A^a_\mu + \bar{j}\psi + \bar{\psi}j + \\
\left.\left. +\bar{\xi}_a\eta^a + \bar{\eta}_a\xi^a + u^\mu_a D_\mu\eta^a - \frac{1}{2}v_a g f^a{}_{bc}\eta^b\eta^c + i\bar{s}g\hat{T}_a\eta^a\psi - ig\bar{\psi}\hat{T}_a\eta^a s\right)\right],
\end{gathered} \tag{3.318}$$

который зависит от источников полей Янга – Миллса J^μ_a, спинорных $(\bar{j},\ j)$ и духовых $(\bar{\xi}_a,\ \xi^a)$ полей, а также дополнительных источников $u^\mu_a,\ v_a,\ \bar{s},\ s$, которые умножаются на вариации $\delta A^a_\mu,\ \delta\eta^a,\ \delta\psi,\ \delta\bar{\psi}$ полевых переменных при БРСТ-преобразованиях. Подвергнем этот функционал БРСТ-преобразованию

$$A'^a_\mu = A^a_\mu + \partial_\mu\eta^a\bar{\varepsilon} - gf^a{}_{bc}A^b_\mu\eta^c\bar{\varepsilon}; \tag{3.319}$$

$$\eta'^a = \eta^a - \frac{1}{2}gf^a{}_{bc}\eta^b\eta^c\bar{\varepsilon}; \tag{3.320}$$

$$\bar{\eta}'_a = \bar{\eta}_a + i\lambda_a\bar{\varepsilon}; \tag{3.321}$$

$$\psi' = \psi + ig\hat{T}_a\eta^a\bar{\varepsilon}\psi;\ \bar{\psi}' = \bar{\psi} - ig\bar{\psi}\hat{T}_a\eta^a\bar{\varepsilon}. \tag{3.322}$$

Как и при выводе тождеств Уорда, покажем, что якобиан этого преобразования равен 1. При этом необходимо учитывать грассманов характер переменных η^a, $\bar{\eta}_a$, ψ, $\bar{\psi}$, в частности, различие между "левыми" и "правыми" производными по грассмановым переменным. Для определенности, выберем "правое" дифференцирование (производные стоят справа, а действуют налево). Отличными от 0 элементами являются следующие:

$$\frac{\delta A'^a_\mu(x)}{\delta A^b_\nu(y)} = \delta^\nu_\mu \delta(x-y)\left(\delta^a_b - gf^a{}_{bc}\eta^c\bar{\varepsilon}\right); \tag{3.323}$$

$$\frac{\delta^r A'^a_\mu(x)}{\delta \eta^b(y)} = \delta(x-y) g f^a{}_{cb} A^c_\mu \bar{\varepsilon}; \tag{3.324}$$

(когда производная по переменной η^a коммутирует с грассмановым параметром $\bar{\varepsilon}$, изменяется знак);

$$\frac{\delta^r \eta'^a(x)}{\delta \eta^b(y)} = \delta(x-y)\left(\delta^a_b - gf^a{}_{bc}\eta^c\bar{\varepsilon}\right); \tag{3.325}$$

$$\frac{\delta^r \bar{\eta}'_a(x)}{\delta \bar{\eta}_b(y)} = \delta(x-y)\delta^b_a; \tag{3.326}$$

$$\frac{\delta^r \psi'(x)}{\delta \psi(y)} = \delta(x-y)\left(1 + ig\hat{T}_a\eta^a\bar{\varepsilon}\right); \tag{3.327}$$

$$\frac{\delta^r \psi'(x)}{\delta \eta^a(y)} = -i\delta(x-y) g\hat{T}_a\psi\bar{\varepsilon}; \tag{3.328}$$

$$\frac{\delta^r \bar{\psi}'(x)}{\delta \bar{\psi}(y)} = \delta(x-y)\left(1 - ig\hat{T}_a\eta^a\bar{\varepsilon}\right); \tag{3.329}$$

$$\frac{\delta^r \bar{\psi}'(x)}{\delta \eta^a(y)} = \delta(x-y) ig\bar{\psi}\hat{T}_a\bar{\varepsilon}; \tag{3.330}$$

Ранее в этих лекциях было показано, что при заменах грассмановых переменных в интегралах возникает множитель, обратный якобиану преобразования. В данном случае мы имеем "смешанное" преобразование – часть переменных (A^a_μ) являются четными, остальные же – нечетными (грассмановыми) переменными. Поэтому для того, чтобы получить правильный ответ, необходимо обобщить те формулы, которые у нас имелись прежде.

Якобиеву матрицу преобразования представим в виде:

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \hat{J}_1 & \hat{J}_2 \\ \hat{J}_3 & \hat{J}_4 \end{pmatrix}, \tag{3.331}$$

где

$$\hat{J}_1 = \left(\frac{\delta A'^a_\mu(x)}{\delta A^b_\nu(y)}\right) \tag{3.332}$$

– матрица, составленная из производных четных элементов по четным;

$$\hat{J}_2 = \left(\frac{\delta A'^a_\mu(x)}{\delta \eta^b(y)};\ \frac{\delta A'^a_\mu(x)}{\delta \bar{\eta}_b(y)};\ \frac{\delta A'^a_\mu(x)}{\delta \psi(y)};\ \frac{\delta A'^a_\mu(x)}{\delta \bar{\psi}(y)} \right) \tag{3.333}$$

– матрица, составленная из производных четных элементов по нечетным;

$$\hat{J}_3 = \left(\frac{\delta \eta'^a(x)}{\delta A^b_\nu(y)};\ \frac{\delta \bar{\eta}'_a(x)}{\delta A^b_\nu(y)};\ \frac{\delta \psi'(x)}{\delta A^b_\nu(y)};\ \frac{\delta \bar{\psi}'(x)}{\delta A^b_\nu(y)} \right)^T \tag{3.334}$$

– матрица, составленная из производных нечетных элементов по четным; значок "T" означает транспонирование; и, наконец,

$$\hat{J}_4 = \frac{\delta\left(\eta'^a(x),\ \bar{\eta}'_a(x),\ \psi'(x),\ \bar{\psi}'(x)\right)}{\delta\left(\eta^b(y),\ \bar{\eta}_b(y),\ \psi(y),\ \bar{\psi}(y)\right)} \tag{3.335}$$

– матрица, составленная из производных нечетных элементов по нечетным. Якобиан преобразования дается формулой

$$J = \det \|\hat{J}\| = \det \left\| \hat{J}_1 - \hat{J}_2 \left(\hat{J}_4\right)^{-1} \hat{J}_3 \right\| \left(\det \|\hat{J}_4\|\right)^{-1}. \tag{3.336}$$

Заметим, что в нашем случае

$$\hat{J}_3 = (0;\ 0;\ 0;\ 0)^T, \tag{3.337}$$

так что

$$J = \det \|\hat{J}_1\| \left(\det \|\hat{J}_4\|\right)^{-1}, \tag{3.338}$$

т. е., как и ожидалось, для грассмановых переменных здесь появляется обратный якобиан;

$$\det \|\hat{J}_1\| = \det \|\delta^a_b - g f^a{}_{bc} \eta^c \bar{\varepsilon}\|; \tag{3.339}$$

$$\hat{J}_4 = \delta(x-y) \left\| \begin{array}{cccc} \delta^a_b - g f^a{}_{bc}\eta^c\bar{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^b_a & 0 & 0 \\ -ig\hat{T}_a\psi\bar{\varepsilon} & 0 & 1 + ig\hat{T}_a\eta^a\bar{\varepsilon} & 0 \\ ig\bar{\psi}\hat{T}_a\bar{\varepsilon} & 0 & 0 & 1 - ig\hat{T}_a\eta^a\bar{\varepsilon} \end{array} \right\| \tag{3.340}$$

$$\det \|\hat{J}_4\| = \det \|\delta^a_b - g f^a{}_{bc} \eta^c \bar{\varepsilon}\|, \tag{3.341}$$

и из (3.338) мы получаем, что

$$J = \det \|\hat{J}\| = 1. \tag{3.342}$$

Вернемся к функционалу (3.318). В силу БРСТ-инвариантности эффективного действия Фаддеева – Попова в эффективном действии в функционале (3.318) при преобразованиях (3.319) – (3.322) изменяются лишь члены, содержащие источники J^μ_a, $\bar{j}$, j, $\bar{\xi}_a$, ξ^a. Члены, содержащие источники u^μ_a, v_a, $\bar{s}$, s остаются инвариантными вследствие нильпотентности БРСТ-преобразований:

$$\delta\left(D_\mu \eta^a\right) = \delta^2 A^a_\mu = 0; \tag{3.343}$$

$$\delta\left(-\frac{1}{2}gf^{a}{}_{bc}\eta^{b}\eta^{c}\right)=\delta^{2}\eta^{a}=0, \tag{3.344}$$

и т. д. Поэтому

$$\delta\mathcal{L}_{(eff)}\left(A^{a}_{\mu},\ \bar{\psi},\ \psi,\ \eta^{a},\ \bar{\eta}_{a}\right)=J^{\mu}_{a}\delta A^{a}_{\mu}+\bar{j}\delta\psi+\delta\bar{\psi}j+\bar{\xi}_{a}\delta\eta^{a}\ +\delta\bar{\eta}_{a}\xi^{a}. \tag{3.345}$$

Заметим, что $\delta\mathcal{L}_{(eff)}$ пропорционально малому параметру $\bar{\varepsilon}$. При выводе тождеств Уорда в $\delta\mathcal{L}_{(eff)}$ входила также вариация члена, фиксирующего калибровку, однако, этот член не давал вклада в окончательное выражение тождеств Уорда (3.317). Поэтому использование БРСТ-инвариантности предоставляет более прямой путь вывода аналогичных тождеств для случая неабелевых полей.

Потребуем БРСТ-инвариантности функционала (3.318), представив результат преобразования (3.319) – (3.322) в виде:

$$\exp\left[i\int d^{4}x\left(J^{\mu}_{a}\frac{\delta}{i\delta u^{\mu}_{a}}-\bar{j}\frac{\delta}{i\delta\bar{s}}-\frac{\delta}{i\delta s}j\ +\bar{\xi}_{a}\frac{\delta}{i\delta v_{a}}-i\lambda_{a}\xi^{a}\right)\bar{\varepsilon}\right]\times$$

$$\times\tilde{Z}[J^{\mu}_{a},\ \bar{j},\ j,\ \bar{\xi}_{a},\ \xi^{a},\ u^{\mu}_{a},\ v_{a},\ \bar{s},\ s]\ =\tilde{Z}[J^{\mu}_{a},\ \bar{j},\ j,\ \bar{\xi}_{a},\ \xi^{a},\ u^{\mu}_{a},\ v_{a},\ \bar{s},\ s]. \tag{3.346}$$

Представляя дифференциальный оператор в (3.346) в виде разложения в ряд, в первом порядке по параметру $\bar{\varepsilon}$ получаем уравнение для функционала $\tilde{Z}$:

$$\int d^{4}x\left(J^{\mu}_{a}\frac{\delta\tilde{Z}}{\delta u^{\mu}_{a}}-\bar{j}\frac{\delta\tilde{Z}}{i\delta\bar{s}}-\frac{\delta\tilde{Z}}{\delta s}j+\bar{\xi}_{a}\frac{\delta\tilde{Z}}{\delta v_{a}}+\lambda_{a}\xi^{a}\tilde{Z}\right)=0. \tag{3.347}$$

(Кстати говоря, члены разложения всех последующих порядков строго равны нулю в силу нечетности параметра $\bar{\varepsilon}:\ \bar{\varepsilon}^{2}=0$ и т. д.)

Уравнение (3.347) для производящего функционала $\tilde{Z}$, как несложно убедиться, является обобщением уравнения (3.300) для неабелевых калибровочных теорий. Это – одна из форм записи тождеств Славнова – Тейлора. С помощью тождественных преобразований (подобных тем, которые имели место при выводе тождеств Уорда) уравнению (3.347) можно придать иную форму, наиболее удобную при доказательстве перенормируемости теорий Янга – Миллса.

4. Развитие методов квантования калибровочных теорий. Методы Баталина – Фрадкина – Вилковыского (гамильтонов формализм) и Баталина – Вилковыского (лагранжев формализм)

4.1. Общая характеристика метода Баталина – Фрадкина – Вилковыского

Когда мы рассматриваем континуальный интеграл как амплитуду перехода между двумя конфигурациями калибровочных полей, мы сталкиваемся с проблемой, что интеграл расходится вследствие вырожденности оператора уравнений движения. Мы уже знакомы с методом Фаддеева – Попова, который подсказывает нам путь, как избежать расходимости континуального интеграла: мы должны ввести в действие калибровочное условие, которое выделяет по одному представителю из каждого класса эквивалентности. (Напоминание: те полевые конфигурации, которое связаны между собой калибровочными преобразованиями, объединяются в классы эквивалентности.)

Однако, мы бы хотели иметь уверенность, что введение калибровочного члена в действие не нарушает калибровочной инвариантности. Иначе говоря, нам нужно определить континуальный интеграл таким образом, чтобы полученное выражение не зависело от выбора функции, которая несет информацию о калибровке.

Баталин, Фрадкин и Вилковыский (БФВ) разработали оригинальный метод квантования калибровочных теорий, который в случае полей Янга – Миллса приводит к тем же результатам, что и метод Фаддеева – Попова (в частности, мы можем получить эффективное действие Фаддеева – Попова, используя соответствующий выбор функции, несущей информацию о калибровке). Но метод БФВ является более общим: уже на примере полей Янга – Миллса можно убедиться, что регуляризация континуального интеграла по Фаддееву – Попову является лишь частным случаем определения континуального интеграла, предложенного Баталиным, Фрадкиным и Вилковыским.

Особенности метода заключаются в следующем.

Метод БФВ опирается на гамильтонову формулировку континуального интеграла, причем, как мы увидим, континуальный интеграл определяется в расширенном фазовом пространстве, включающем, наряду с физическими и калибровочными, также духовые степени свободы. Введение духовых степеней свободы в методе БФВ осуществляется совершенно другим способом, чем в методе Фаддеева – Попова.

Другой существенной особенностью метода БФВ является использование БРСТ-преобразований, которые вводятся на классическом уровне. Как мы помним, эффективное действие Фаддеева – Попова не является калибровочно-инвариантным: калибровочная инвариантность действия нарушается введением члена, фиксирующего калибровку, но сохраняется инвариантность действия относительно "обобщенных" калибровочных преобразований, которые впервые были замечены Бекки, Руэ, Сторой и Тютиным. Оказывается, что БРСТ-инвариантность эффективного действия можно использовать при доказательстве независимости континуального интеграла от выбора калибровочной функции. Центральное место в подходе БФВ занимает теорема Фрадкина – Вилковыского, которая утверждает независимость континуального интеграла в расширенном фазовом пространстве с БРСТ-инвариантным эффективным действием от выбора функции, содержащей информацию о калибровке.

Для того, чтобы понять суть подхода БФВ, нам необходимо ближе познакомиться с БРСТ-преобразованиями. В этом курсе уже рассматривались БРСТ-преобразования в лагранжевой форме и доказывалась БРСТ-инвариантность эффективного действия Фаддеева – Попова для полей Янга – Миллса. Теперь мы рассмотрим БРСТ-преобразования в расширенном фазовом пространстве и введем генератор БРСТ-преобразований. Существование этого генератора вытекает из инвариантности действия, и он может быть построен в соответствии с первой теоремой Нетер. После этого мы рассмотрим определение БРСТ-генератора, предложенное Баталиным, Фрадкиным и Вилковыским, и увидим, что с одной стороны, определенный по БФВ БРСТ-генератор совпадает с генератором, построенным по теореме Нетер, а с другой стороны, данное Баталиным, Фрадкиным и Вилковыским определение БРСТ-генератора содержит возможности для обобщения и указывает способ введения духовых степеней свободы. Эти результаты будут впоследствии использованы нами для доказательства теоремы Фрадкина – Вилковыского.

4.2. Гамильтонова форма действия для полей Янга – Миллса

В главе 3, используя дираковский подход, мы построили гамильтониан полей Янга – Миллса (см. формулу (3.95) главы 3):

$$\mathcal{H}_{(0)} = p_a^i \dot{A}_i^a - \mathcal{L} = -\frac{1}{2} p_a^i p_i^a + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} - A_0^a D_i p_a^i. \tag{4.1}$$

Действие в гамильтоновой форме имеет вид:

$$S_{(0)} = \int d^4x \left[p_a^i \dot{A}_i^a + \frac{1}{2} p_a^i p_i^a - \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} + A_0^a D_i p_a^i \right]. \tag{4.2}$$

Построим полное действие с учетом калибровки и духового сектора в гамильтоновой форме. Будем использовать лоренцеву калибровку

$$\chi^a = \partial^\mu A_\mu^a. \tag{4.3}$$

Лагранжиан духов Фаддеева – Попова для лоренцевой калибровки (см. формулы (3.131) – (3.133), (3.155) – (3.157) главы 3).

$$\mathcal{L}_{(ghost)} = -i\bar{\eta}_a \partial^\mu D_\mu \eta^a = i\partial^\mu \bar{\eta}_a D_\mu \eta^a. \tag{4.4}$$

Введем духовые импульсы

$$\bar{\mathcal{P}}_a = \frac{\partial^l \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}^a} = -i\dot{\bar{\eta}}_a; \tag{4.5}$$

$$\mathcal{P}^a = \frac{\partial^l \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\eta}}_a} = iD_0\eta^a = i\partial_0\eta^a - igf^a{}_{bc}A_0^b\eta^c; \tag{4.6}$$

$$\dot{\eta}^a = -i\mathcal{P}^a + gf^a{}_{bc}A_0^b\eta^c. \tag{4.7}$$

(производные по духовым переменным – левые).

Полное действие может быть представлено в виде

$$S = \int d^4x \left[p_a^i \dot{A}_i^a + \frac{1}{2}p_a^i p_i^a - \frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij} + A_0^a D_i p_a^i - \right.$$

$$\left. -i\bar{\eta}_a \partial^0 D_0 \eta^a - i\bar{\eta}_a \partial^i D_i \eta^a + \pi_a \partial^\mu A_\mu^a \right] =$$

$$= \int d^4x \left[p_a^i \dot{A}_i^a + \pi_a \dot{A}_0^a + \dot{\eta}^a \bar{\mathcal{P}}_a + \dot{\mathcal{P}}^a \bar{\eta}_a + \frac{1}{2}p_a^i p_i^a - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij} + A_0^a D_i p_a^i - i\bar{\eta}_a \partial^i D_i \eta^a - i\bar{\mathcal{P}}_a \mathcal{P}^a + gf^a{}_{bc}A_0^b \bar{\mathcal{P}}_a \eta^c + \pi_a \partial^i A_i^a \right]. \tag{4.8}$$

4.3. Генератор БРСТ-преобразований

Теперь введем величину

$$\Omega = \int d^3x \left(-\eta^a D_i p_a^i - i\pi_a \mathcal{P}^a + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{P}}_a g f^a{}_{bc} \eta^b \eta^c \right) \tag{4.9}$$

и рассмотрим генерируемые этой величиной преобразования

$$\delta B = \{B,\ \Omega\}\bar{\varepsilon}, \tag{4.10}$$

$\bar{\varepsilon}$ – грассманова константа.

Нам понадобится обобщение скобки Пуассона на случай грассмановых переменных. По определению,

$$\{B,\ D\} = \frac{\delta^r B}{\delta z_A}\{z_A,\ z_B\}\frac{\delta^l D}{\delta z_B}. \tag{4.11}$$

Здесь z_A – переменные расширенного фазового пространства; $\dfrac{\delta^l D}{\delta z_B}$ – "левая" вариационная производная величины D (которая стоит слева, а действует направо), $\dfrac{\delta^r B}{\delta z_A}$ –

"правая" вариационная производная величины B (наоборот, стоит справа, а действует налево). Для четных переменных (всех, кроме духовых) нет различия в левых и правых производных, и скобки Пуассона определяются как обычно:

$$\{p_a^\mu,\ A_\nu^b\} = -\delta_\nu^\mu \delta_a^b = -\{A_\nu^b,\ p_a^\mu\}. \tag{4.12}$$

Однако, для нечетных (грассмановых) переменных разумно определить скобки Пуассона следующим образом:

$$\{\bar{\mathcal{P}}_a,\ \eta^b\} = -\delta_a^b = \{\eta^b,\ \bar{\mathcal{P}}_a\}; \tag{4.13}$$

$$\{\mathcal{P}^a,\ \bar{\eta}_b\} = -\delta_b^a = \{\bar{\eta}_b,\ \mathcal{P}^a\}. \tag{4.14}$$

С учетом сказанного,

$$\delta A_i^a = \{A_i^a,\ \Omega\}\bar{\varepsilon} = \frac{\delta\Omega}{\delta p_a^i}\bar{\varepsilon} = D_i\eta^a\bar{\varepsilon}. \tag{4.15}$$

Здесь вариационная производная

$$\frac{\delta\Omega}{\delta p_a^i} = \frac{\partial\Omega}{\partial p_a^i} - \partial_j\frac{\partial\Omega}{\partial(\partial_j p_a^i)} = \eta^b g f^a{}_{bc} A_i^c + \partial_i\eta^a = D_i\eta^a \tag{4.16}$$

$$\delta A_0^a = \{A_0^a,\ \Omega\}\bar{\varepsilon} = \frac{\delta\Omega}{\delta\pi_a}\bar{\varepsilon} = -i\mathcal{P}^a\bar{\varepsilon}; \tag{4.17}$$

$$\delta p_a^i = \{p_a^i,\ \Omega\}\bar{\varepsilon} = -\frac{\delta\Omega}{\delta A_i^a}\bar{\varepsilon} = -g f^b{}_{ca} p_b^i \eta^c\bar{\varepsilon}; \tag{4.18}$$

$$\delta\pi_a = \{\pi_a,\ \Omega\}\bar{\varepsilon} = -\frac{\delta\Omega}{\delta A_0^a}\bar{\varepsilon} = 0; \tag{4.19}$$

$$\delta\eta^a = \{\eta^a,\ \Omega\}\bar{\varepsilon} = -\frac{\delta^l\Omega}{\delta\bar{\mathcal{P}}_a}\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{2} g f^a{}_{bc}\eta^b\eta^c\bar{\varepsilon}; \tag{4.20}$$

$$\delta\bar{\eta}_a = \{\bar{\eta}_a,\ \Omega\}\bar{\varepsilon} = -\frac{\delta^l\Omega}{\delta\mathcal{P}^a}\bar{\varepsilon} = i\pi_a\bar{\varepsilon}; \tag{4.21}$$

$$\delta\bar{\mathcal{P}}_a = \{\bar{\mathcal{P}}_a,\ \Omega\}\bar{\varepsilon} = -\frac{\delta^l\Omega}{\delta\eta^a}\bar{\varepsilon} = D_i p_a^i\bar{\varepsilon} + \bar{\mathcal{P}}_b g f^b{}_{ac}\eta^c\bar{\varepsilon}; \tag{4.22}$$

$$\delta\mathcal{P}^a = \{\mathcal{P}^a,\ \Omega\}\bar{\varepsilon} = -\frac{\delta^l\Omega}{\delta\bar{\eta}_a}\bar{\varepsilon} = 0. \tag{4.23}$$

Можно убедиться, что действие (4.8) инвариантно относительно преобразований (4.15), (4.17) – (4.23).

Инвариантность члена $-\frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij}$ в лагранжиане очевидна; ранее была также доказана инвариантность членов

$$-i\bar{\eta}_a\partial^\mu D_\mu\eta^a + \pi_a\partial^\mu A_\mu^a. \tag{4.24}$$

Остается проверить инвариантность членов

$$p_a^i \dot{A}_i^a + \frac{1}{2} p_a^i p_i^a + A_0^a D_i p_a^i, \tag{4.25}$$

это можно сделать прямой проверкой.

Однако, необходимо обратить внимание на то, что указанные члены инвариантны "с точностью до полных производных", т. е. изменение лагранжиана при преобразованиях (4.15), (4.17) – (4.23) сводится к полным производным, а изменение действия, соответственно, – к граничному члену. Для того, чтобы обеспечить инвариантность динамически-эквивалентных лагранжианов (лагранжианов, отличающихся на полную производную), вводят граничные условия для духовых переменных – на границе духи зануляются. Таково происхождение граничных условий для духовых переменных в методе БФВ: они обеспечивают БРСТ-инвариантность действия, в отличие от метода Фаддеева – Попова, где их роль сводится к устранению остаточных степеней свободы, не фиксируемых калибровкой.

4.4. Построение БРСТ-генератора в соответствии с первой теоремой Нетер

Пусть действие инвариантно относительно преобразования обобщенных координат

$$q'^A = q^A + \delta q^A \tag{4.26}$$

(т. е. изменение действия при рассматриваемых преобразованиях $\delta S = 0$). Тогда сохраняется величина

$$\Omega = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 q^A)} \delta q^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_\mu q^A)} \delta(\partial_\mu q^A) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \partial_\mu q^A)} \right) \delta q^A \right]. \tag{4.27}$$

(Мы рассматриваем случай лагранжиана, содержащего вторые производные,

$$\mathcal{L}\left(q^A,\ \partial_\mu q^A,\ \partial_\mu \partial_\nu q^A\right), \tag{4.28}$$

и, кроме того, случай внутренних симметрий, т. е. пространственно-временные координаты не подвергаются преобразованию. В противном случае изменение пространственно-временных координат дает вклад в изменение действия.)

Действительно, в этом случае,

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^A} \delta q^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q^A)} \delta(\partial_\mu q^A) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu q^A)} \delta(\partial_\mu \partial_\nu q^A) \right] =$$

$$= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^A} \delta q^A + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q^A)} \delta q^A \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q^A)} \right) \delta q^A + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu q^A)} \delta(\partial_\nu q^A) \right) - \right.$$

$$-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu q^A)}\right)\delta(\partial_\nu q^A)\Big] = \int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^A}\delta q^A + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q^A)}\delta q^A\right) -\right.$$

$$-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q^A)}\right)\delta q^A + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu q^A)}\delta(\partial_\nu q^A)\right) -$$

$$\left.-\partial_\nu\left(\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu q^A)}\right]\delta q^A\right) + \partial_\nu\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu q^A)}\right)\delta q^A\right]. \qquad (4.29)$$

В силу лагранжевых уравнений движения

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^A} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q^A)}\right) + \partial_\nu\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu q^A)}\right) = 0, \qquad (4.30)$$

так что

$$\delta S = \int d^4x\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q^A)}\delta q^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu q^A)}\delta(\partial_\nu q^A) - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu q^A)}\right)\delta q^A\right] = 0. \qquad (4.31)$$

Отсюда вытекает закон сохранения величины (4.27) – интеграл по 4-объему преобразуется в интеграл по пространственноподобной гиперповерхности (обобщенная теорема Гаусса).

Построим генератор преобразований (4.15), (4.17) – (4.23) по первой теореме Нетер. Будем исходить из действия в лагранжевой форме

$$S = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a - i\bar\eta_a\partial^\mu D_\mu\eta^a + \pi_a\partial^\mu A^a_\mu\right] =$$

$$= \int d^4x\left[-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a - i\bar\eta_a\partial^\mu\partial_\mu\eta^a + i\bar\eta_a g f^a{}_{bc}\partial^\mu A^b_\mu\eta^c + \right.$$

$$\left. + i\bar\eta_a g f^a{}_{bc}A^b_\mu\partial^\mu\eta^c + \pi_a\partial^\mu A^a_\mu\right]. \qquad (4.32)$$

Учитывая, что для грассмановых переменных

$$\delta B = \frac{\delta^r B}{\delta z_A}\delta z_A = \delta z_A\frac{\delta^l B}{\delta z_A}, \qquad (4.33)$$

получим:

$$\Omega\bar\varepsilon = \int d^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot A^a_i}\delta A^a_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot A^a_0}\delta A^a_0 + \delta\eta^a\frac{\partial^l\mathcal{L}}{\partial\dot\eta^a} + \delta\dot\eta^a\frac{\partial^l\mathcal{L}}{\partial\ddot\eta^a} - \delta\eta^a\partial_0\left(\frac{\partial^l\mathcal{L}}{\partial\ddot\eta^a}\right)\right] =$$

$$= \int d^3x\left[p^i_a D_i\eta^a\bar\varepsilon - i\pi_a\mathcal{P}^a\bar\varepsilon + \bar\eta_b g f^b{}_{ac}\eta^c\mathcal{P}^a\bar\varepsilon + \frac{i}{2}g f^a{}_{bc}\eta^b\eta^c\bar\varepsilon\bar\eta_d g f^d{}_{ea}A^e_o - \right.$$

$$\left. -\frac{i}{2}g f^a{}_{bc}\left(\eta^b\eta^c\right)^{\cdot}\bar\varepsilon\bar\eta_a + \frac{i}{2}g f^a{}_{bc}\eta^b\eta^c\bar\varepsilon\dot{\bar\eta}_a\right] \qquad (4.34)$$

В первом члене перебрасываем ковариантную производную; в третьем члене используем явное выражение (4.6); в пятом члене учитываем, что

$$f^a{}_{bc}\left(\eta^b\eta^c\right)^{\cdot} = f^a{}_{bc}\left(\dot\eta^b\eta^c + \eta^b\dot\eta^c\right) = f^a{}_{bc}\left(\dot\eta^b\eta^c - \dot\eta^c\eta^b\right) = 2f^a{}_{bc}\dot\eta^b\eta^c. \tag{4.35}$$

$$\Omega\bar\varepsilon = \int d^3x\, \Big[-D_i p^i_a\eta^a\bar\varepsilon - i\pi_a\mathcal{P}^a\bar\varepsilon + i\bar\eta_b g f^b{}_{ac}\eta^c\dot\eta^a\bar\varepsilon -$$
$$-i\bar\eta_b g^2 f^b{}_{ac}\eta^c f^a{}_{de}A^d_0\eta^e\bar\varepsilon - \frac{i}{2}\bar\eta_d g^2 f^d{}_{ea}f^a{}_{bc}\eta^b\eta^c\bar\varepsilon A^e_o +$$
$$+i\bar\eta_a g f^a{}_{bc}\dot\eta^b\eta^c\bar\varepsilon + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{P}}_a g f^a{}_{bc}\eta^b\eta^c\bar\varepsilon\Big]. \tag{4.36}$$

Члены, пропорциональные g^2, сократятся благодаря тождествам Якоби для структурных констант, так что у нас останется

$$\Omega\bar\varepsilon = \int d^3x \left[-D_i p^i_a\eta^a\bar\varepsilon - i\pi_a\mathcal{P}^a\bar\varepsilon + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{P}}_a g f^a{}_{bc}\eta^b\eta^c\bar\varepsilon\right]. \tag{4.37}$$

Определение Ω совпадает с формулой (4.9).

4.5. Определение генератора Ω по БФВ

Баталин, Фрадкин и Вилковыский указали способ построения БРСТ-генератора Ω, не обращаясь к теореме Нетер. Этот способ имеет то преимущество, что нам не требуется знать явный вид БРСТ-преобразований. Напротив, мы сначала можем построить генератор Ω, а лишь за тем с его помощью получить преобразования всех полевых переменных. Для построения генератора нам достаточно использовать информацию о структуре калибровочной теории, которая содержится в действии.

Как мы знаем, гамильтонова форма действия для теории со связями есть

$$S = \int d^4x\left(p_A\dot q^A - H_{(0)} - \lambda^a\varphi_a\right). \tag{4.38}$$

Здесь φ_a – это набор вторичных связей, а λ^a – лагранжевы множители при связях. Лагранжиан не содержит производных по времени от λ^a, поэтому сопряженные им импульсы π_a также представляют собой связи $\pi_a = 0$, и их можно включить в полный набор связей

$$G_\alpha = (\pi_a,\ \varphi_a). \tag{4.39}$$

Мы видели, что в электродинамике, теориях Янга – Миллса, а также и в гравитации роль лагранжевых множителей при связях играют калибровочные степени свободы, так что по существу связи $\pi_a = 0$ в этих теориях представляют собой первичные связи с точки зрения развитой Дираком обобщенной гамильтоновой динамики, а связи $\varphi_a = 0$ – вторичные связи, получаемые из условия сохранения первичных связей во времени.

В электродинамике, теориях Янга – Миллса и гравитации условия сохранения во времени связей $\varphi_a = 0$ не дают нам новых связей. В общем же случае мы должны повторять процедуру получения новых связей из условия сохранения во времени уже найденных нами связей до тех пор, пока не выявим все связи, существующие в теории. Согласно общепринятой терминологии, первичными называются связи, которые обнаруживаются при введении обобщенных импульсов как производных лагранжиана по скоростям. Все остальные, получаемые из условий сохранения уже найденных связей во времени, носят название вторичных. Так что набор связей $\varphi_a = 0$ не исчерпывается лишь теми связями, которые получаются непосредственно из условий сохранения во времени первичных связей.

Все связи G_α являются генераторами калибровочных преобразований. Например, в случае полей Янга – Миллса связи π_a генерируют преобразование временной компоненты векторного потенциала A_0^a, а связи $\varphi_a = -D_i p_a^i$ – преобразование пространственных компонент A_i^a.

Набор связей G_α удовлетворяет соотношениям

$$\{G_\alpha,\ G_\beta\} = C^\gamma{}_{\alpha\beta} G_\gamma. \tag{4.40}$$

$C^\gamma{}_{\alpha\beta}$ – структурные функции. В случае теорий Янга – Миллса структурные функции являются константами. Это обеспечивает замкнутость алгебры калибровочных преобразований. Под замкнутостью алгебры калибровочных преобразований понимается следующее.

В главе 3 был получен коммутатор двух последовательных преобразований величины B, генерируемых связями G_α, с инфинитезимальными параметрами ε^α и ξ^α:

$$\begin{aligned}\delta_\xi\delta_\varepsilon B - \delta_\varepsilon\delta_\xi B &= \left(\{\{B,\ G_\alpha\},\ G_\beta\} - \{\{B,\ G_\beta\},\ G_\alpha\}\right)\varepsilon^\alpha\xi^\beta = \\ &= \{B,\ \{G_\alpha,\ G_\beta\}\}\varepsilon^\alpha\xi^\beta.\end{aligned} \tag{4.41}$$

(Здесь для простоты рассматривается случай, когда связи и инфинитезимальные параметры являются четными).

Если связи коммутируют (абелева теория; все структурные константы равны 0), результат двух последовательных калибровочных преобразований некоторой величины B не зависит от порядка проведения этих преобразований.

Пусть теперь структурные функции $C^\gamma{}_{\alpha\beta}$ отличны от 0. Тогда

$$\delta_\xi\delta_\varepsilon B - \delta_\varepsilon\delta_\xi B = \{B,\ C^\gamma{}_{\alpha\beta}G_\gamma\}\varepsilon^\alpha\xi^\beta = \{B,\ G_\gamma\}C^\gamma{}_{\alpha\beta}\varepsilon^\alpha\xi^\beta + \{B,\ C^\gamma{}_{\alpha\beta}\}G_\gamma\varepsilon^\alpha\xi^\beta. \tag{4.42}$$

Когда структурные функции $C^\gamma{}_{\alpha\beta}$ – константы, мы видим, что операция (4.42) над величиной B сводится к калибровочному преобразованию B с параметром

$$\theta^\gamma = C^\gamma{}_{\alpha\beta}\varepsilon^\alpha\xi^\beta. \tag{4.43}$$

$$\delta_\xi\delta_\varepsilon B - \delta_\varepsilon\delta_\xi B = \{B,\ G_\gamma\}\theta^\gamma. \tag{4.44}$$

В этом случае говорят, что алгебра калибровочных преобразований является замкнутой. Если $C^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ содержат функциональную зависимость от переменных фазового пространства, алгебра калибровочных преобразований открыта.

Если связи G_α все нечетные, структурные функции $C^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ не будут антисимметричными по нижним индексам. Удобно обобщить определение структурных функций на случай нечетных связей G_α:

$$U^{(1)}{}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = -\frac{1}{2}(-1)^{P(G_\beta)}C^{\alpha}{}_{\beta\gamma}; \tag{4.45}$$

$P(G_\alpha)$ – грассманова четность связи G_α; в случае теорий Янга – Миллса все связи четные, и $P(G_\alpha)=0$. Множитель $\frac{1}{2}$ введен для удобства. Определение (4.45) обеспечивает антисимметричность $U^{(1)}{}_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$ по нижним индексам.

Когда алгебра калибровочных преобразований не замкнута, могут быть определены структурные функции высших порядков. В соответствие с тождеством Якоби

$$\begin{aligned}\{\{G_\alpha,\, G_\beta\},\, G_\gamma\} + \{\{G_\beta,\, G_\gamma\},\, G_\alpha\} + \{\{G_\gamma,\, G_\alpha\},\, G_\beta\} =\\ = \{C^{\delta}{}_{\alpha\beta}G_\delta,\, G_\gamma\} + \{C^{\delta}{}_{\beta\gamma}G_\delta,\, G_\alpha\} + \{C^{\delta}{}_{\gamma\alpha}G_\delta,\, G_\beta\} = 0\end{aligned} \tag{4.46}$$

(вновь рассматриваем случай четных связей G_α).

Если $C^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ – константы, из (4.46) вытекает лишь тождество для структурных констант. В случае функциональной зависимости $C^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$ левую часть (4.46) можно представить в виде

$$\{\{G_\alpha,\, G_\beta\},\, G_\gamma\} + \{\{G_\beta,\, G_\gamma\},\, G_\alpha\} + \{\{G_\gamma,\, G_\alpha\},\, G_\beta\} = 2U^{(2)}{}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta\varepsilon}G_\varepsilon G_\delta. \tag{4.47}$$

Доказательство чисто формальное и заключается в следующем. Левая часть (4.46) переписывается в виде свертки величин

$$D_{\alpha\beta\gamma}{}^{\varepsilon} = C^{\delta}{}_{\alpha\beta}C^{\varepsilon}{}_{\delta\gamma} + C^{\delta}{}_{\beta\gamma}C^{\varepsilon}{}_{\delta\alpha} + C^{\delta}{}_{\gamma\alpha}C^{\varepsilon}{}_{\delta\beta} + \{C^{\varepsilon}{}_{\alpha\beta},\, G_\gamma\} + \{C^{\varepsilon}{}_{\beta\gamma},\, G_\alpha\} + \{C^{\varepsilon}{}_{\gamma\alpha},\, G_\beta\}, \tag{4.48}$$

полностью антисимметричных по индексам α, β и γ, со связями G_ε. Тогда, поскольку, в силу тождеств Якоби, свертка

$$D_{\alpha\beta\gamma}{}^{\varepsilon}G_\varepsilon = 0, \tag{4.49}$$

можно доказать, что сами величины $D_{\alpha\beta\gamma}{}^{\varepsilon}$ представимы в виде сверток некоторых других величин со связями:

$$D_{\alpha\beta\gamma}{}^{\varepsilon} = 2U^{(2)}{}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta\varepsilon}G_\delta. \tag{4.50}$$

Формулу (4.47) можно рассматривать как определение структурных функций второго порядка, причем антисимметризация левой части приводит к антисимметричности структурных функций $U^{(2)}{}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta\varepsilon}$ по индексам α, β, γ. Можно доказать возможность такого определения структурных констант, чтобы они были антисимметричны и по верхним индексам δ, ε.

Аналогично определяются структурные функции следующих порядков. Мы не будем на этом останавливаться.

Полный набор связей G_α можно рассматривать как структурные функции нулевого порядка

$$U^{(0)}{}_\alpha = G_\alpha = (\pi_a,\ \varphi_a). \tag{4.51}$$

Теперь мы можем дать определение генератора Ω по Баталину, Фрадкину и Вилковыскому.

В подходе БФВ генератор Ω строится в виде ряда по степеням грассмановых (духовых) переменных, причем коэффициентами разложения являются обобщенные структурные функции n-го порядка $U^{(n)}{}_{\beta_1\dots\beta_{n+1}}^{\alpha_1\dots\alpha_n}$:

$$\Omega = \sum_n c^{\beta_{n+1}}\dots c^{\beta_1} U^{(n)}{}_{\beta_1\dots\beta_{n+1}}^{\alpha_1\dots\alpha_n} \bar{\rho}_{\alpha_n}\dots\bar{\rho}_{\alpha_1}. \tag{4.52}$$

Как мы далее увидим, переменные $\{c^\alpha\}$ и $\{\bar{\rho}_\alpha\}$ являются канонически сопряженными в расширенном фазовом пространстве.

Число переменных $\{c^\alpha\}$ (а также сопряженных им переменных $\{\bar{\rho}_\alpha\}$) равно числу связей G_α. Четность переменных $\{c^\alpha\}$ и $\{\bar{\rho}_\alpha\}$ противоположна четности соответствующих связей G_α. В случае полей Янга – Миллса все связи четные, так что переменные $\{c^\alpha\}$ и $\{\bar{\rho}_\alpha\}$ нечетные. Поскольку в общем случае допускается, что переменные $\{c^\alpha\}$ и $\{\bar{\rho}_\alpha\}$ могут быть и четными (когда связи нечетны), помимо четности вводится дополнительная величина, называемая "духовым числом" (или "духовым зарядом"). Духовые переменные $\{c^\alpha\}$ имеют духовое число 1, сопряженные им величины $\{\bar{\rho}_\alpha\}$ имеют духовое число -1, остальные переменные имеют духовое число 0. Духовое число произведения равно сумме духовых чисел сомножителей.

Определенный таким образом генератор Ω имеет грассманову четность, равную 1, и духовое число, равное 1, поскольку в член разложения n-го порядка входит $(n+1)$ духовая переменная c^α и n сопряженных величин $\bar{\rho}_\alpha$.

Заметим также, что свертки

$$U^{(n)\alpha_1\dots\alpha_n} = c^{\beta_{n+1}}\dots c^{\beta_1} U^{(n)}{}_{\beta_1\dots\beta_{n+1}}^{\alpha_1\dots\alpha_n} \tag{4.53}$$

структурных функций с грассмановыми переменными $c^{\beta_{n+1}},\dots,c^{\beta_1}$ позволяют автоматически учесть антисимметризацию структурных функций по нижним индексам. Подобным образом свертка

$$U^{(n)\alpha_1\dots\alpha_n}\bar{\rho}_{\alpha_n}\dots\bar{\rho}_{\alpha_1} \tag{4.54}$$

с грассмановыми переменными $\bar{\rho}_{\alpha_n},\ \dots,\ \bar{\rho}_{\alpha_1}$ позволяет учесть антисимметризацию структурных функций по нижним индексам.

Разложение (4.52) должно удовлетворять двум требованиям:

1) Член разложения порядка 0 генерирует калибровочные преобразования, в которых инфинитезимальные параметры заменены грассмановыми величинами c^α.

Практически очевидно, что первое условие удовлетворяется благодаря определению (4.51).

2) Условие нильпотентности генератора Ω

$$\{\Omega,\ \Omega\} = 0. \tag{4.55}$$

Поскольку Ω – нечетная величина, это условие нетривиально. Оно будет играть важную роль в дальнейшем.

Теперь покажем, что определение (4.52) полностью согласуется с тем выражением для генератора Ω, которое выше было получено по теореме Нетер для теорий Янга – Миллса.

В случае теорий Янга – Миллса отличны от 0 лишь структурные функции нулевого и первого порядков, так что будем иметь:

$$\Omega = c^\alpha U^{(0)}{}_\alpha + c^\beta c^\gamma U^{(1)}{}_{\gamma\beta}{}^\alpha \bar{\rho}_\alpha. \tag{4.56}$$

Если все структурные функции теории порядков строго больше s равны 0, говорят, что данная теория имеет ранг s. Если связи коммутируют, теория имеет ранг 0. Теории с полями Янга – Миллса имеют ранг 1. Теории ранга 0 и 1 являются теориями с замкнутыми алгебрами калибровочных преобразований. Теории ранга больше 1 – это теории с открытыми алгебрами.

Далее,

$$U^{(0)}{}_\alpha = G_\alpha = (\pi_a,\ -D_i p^i_a); \tag{4.57}$$

$$\{\pi_a,\ \pi_b\} = 0; \tag{4.58}$$

$$\{\pi_a,\ \varphi_b\} = 0; \tag{4.59}$$

$$\{\varphi_a,\ \varphi_b\} = g f^c{}_{ab}\varphi_c, \tag{4.60}$$

так что структурные функции первого порядка

$$U^{(1)}{}_{\gamma\beta}{}^\alpha = \left(0,\ 0,\ \frac{1}{2} g f^a{}_{bc}\right). \tag{4.61}$$

(Структурные функции, которые входят в коммутаторы связей из первой группы (4.58) и коммутаторы связей из разных групп (4.59), равны нулю.)

В соответствие с разделением на две группы связей удобно разделить на две группы также грассмановы переменные $\{c^\alpha\}$ и $\{\bar{\rho}_\alpha\}$ соответственно:

$$c^\alpha = (-i\mathcal{P}^a,\ \eta^a); \tag{4.62}$$

$$\bar{\rho}_\alpha = (i\bar{\eta}_a,\ \bar{\mathcal{P}}_a); \tag{4.63}$$

Остается подставить (4.57), (4.61) – (4.63) в (4.56):

$$\Omega = -\eta^a D_i p^i_a - i\mathcal{P}^a \pi_a + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{P}}_a g f^a{}_{bc}\eta^b\eta^c, \tag{4.64}$$

что вновь совпадает с (4.9).

Не составляет труда выписать генератор Ω для электродинамики. Там мы имеем

$$U^{(0)}{}_\alpha = G_\alpha = (\pi,\ -\partial_i p^i); \tag{4.65}$$

все структурные константы порядка выше нулевого равны 0. Поэтому немедленно получаем:

$$\Omega = c^\alpha U^{(0)}{}_\alpha = -\eta\partial_i p^i - i\mathcal{P}\pi. \tag{4.66}$$

Преобразования, генерируемые этим генератором, оставляют инвариантным эффективное действие для электродинамики независимо от выбранной калибровки.

4.6. Определение континуального интеграла по БФВ

Согласно Баталину, Фрадкину и Вилковыскому, амплитуда перехода между двумя конфигурациями калибровочных полей дается континуальным интегралом

$$\int \exp\left(iS_{(eff)}\right) D\mu, \tag{4.67}$$

где $D\mu$ – мера Лиувилля в расширенном фазовом пространстве,

$$D\mu = \prod_x \left(\prod_A dp_A(x) dq^A(x) \prod_a d\pi_a(x) d\lambda^a(x) \prod_\alpha d\bar{\rho}_\alpha(x) dc^\alpha(x) \right) \tag{4.68}$$

(берется произведение по всем пространственно-временным точкам), $S_{(eff)}$ – эффективное действие

$$S_{(eff)} = \int d^4x \left(p_A \dot{q}^A + \pi_a \dot{\lambda}^a + \dot{c}^\alpha \bar{\rho}_\alpha - \mathcal{H}_{(0)} + \{\bar{\psi},\ \Omega\} \right), \tag{4.69}$$

$(p_A,\ q^A)$ – канонически сопряженные переменные исходного фазового пространства, λ^a – лагранжевы множители при связях φ_a, π_a – канонически сопряженные им импульсы, $(c^\alpha,\ \bar{\rho}_\alpha)$ – канонически сопряженные пары "духов БФВ", $\bar{\psi}$ – произвольная нечетная мнимая функция, которая содержит информацию о калибровке.

Эффективное действие БФВ (4.69) является БРСТ-инвариантным. БРСТ-инвариантность обеспечивается как конструкцией действия, так и граничными условиями, накладываемами на переменные в расширенном фазовом пространстве.

Используя БРСТ-инвариантность эффективного действия, мы докажем, что континуальный интеграл (4.67) – (4.69) является независимым от выбора функции $\bar{\psi}$. Утверждение о независимости интеграла (4.67) – (4.69) от выбора функции $\bar{\psi}$ составляет содержание теоремы Фрадкина – Вилковыского.

Определение (4.67) – (4.69) представляет собой, по-существу. способ регуляризации континуального интеграла, предложенный Баталиным, Фрадкиным и Вилковыским.

Характерно, что в определении (4.67) – (4.69) полностью зафиксирована мера: мера (как, впрочем, и эффективное действие) определяется таким образом, чтобы обеспечить независимость континуального интеграла от функции, содержащей информацию о калибровке.

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы Фрадкина – Вилковыского, вернемся к теории полей Янга – Миллса, к которой мы все время обращаемся, чтобы проиллюстрировать общие положения, и покажем, что эффективное действие Фаддеева – Попова в гамильтоновой форме для случая лоренцевой калибровки соответствует частному выбору функции $\bar{\psi}$ в формуле (4.69).

С учетом (4.62), (4.63) имеем:

$$p_A \dot{q}^A + \pi_a \dot{\lambda}^a + \dot{c}^\alpha \bar{\rho}_\alpha \to p_a^i \dot{A}_i^a + \pi_a \dot{A}_0^a + \dot{\eta}^a \bar{\mathcal{P}}_a + \dot{\mathcal{P}}^a \bar{\eta}_a; \tag{4.70}$$

$$\mathcal{H}_{(0)} = -\frac{1}{2}p^i_a p^a_i + \frac{1}{4}F^a_{ij}F^{ij}_a \tag{4.71}$$

– гамильтониан без учета связей.

Функцию $\bar{\psi}$ определим как

$$\bar{\psi} = \int d^3x \left(i\bar{\eta}_a \chi^a + \bar{\mathcal{P}}_a A^a_0 \right), \tag{4.72}$$

$$\chi^a = -\partial^i A^a_i \tag{4.73}$$

и вычислим скобки Пуассона

$$\{\bar{\psi},\, \Omega\} = \frac{\delta\bar{\psi}}{\delta A^a_i}\frac{\delta\Omega}{\delta p^i_a} - \frac{\delta\bar{\psi}}{\delta p^i_a}\frac{\delta\Omega}{\delta A^a_i} + \frac{\delta\bar{\psi}}{\delta A^a_0}\frac{\delta\Omega}{\delta\pi_a} - \frac{\delta\bar{\psi}}{\delta\pi_a}\frac{\delta\Omega}{\delta A^a_0} -$$

$$-\frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\eta^a}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\bar{\mathcal{P}}_a} - \frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\bar{\mathcal{P}}_a}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\eta^a} - \frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\bar{\eta}_a}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\mathcal{P}^a} - \frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\mathcal{P}^a}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\bar{\eta}_a} =$$

$$= i\partial^i\bar{\eta}_a D_i\eta^a - i\bar{\mathcal{P}}_a\mathcal{P}^a + A^a_0 D_i p^i_a + A^a_0 g f^b{}_{ac}\bar{\mathcal{P}}_b\eta^c + \partial^i A^a_i \pi_a. \tag{4.74}$$

Подставляя все эти выражения в формулу (4.69), получаем эффективное действие Фаддеева – Попова в гамильтоновой форме (4.8).

Как мы видели, действие (4.8) БРСТ-инвариантно с точностью до членов, являющимися полными производными. И для того, чтобы обеспечить строгую БРСТ-инвариантность действия, необходимо наложить граничные условия. В данном случае достаточно наложить следующие граничные условия:

$$\eta^a(t,\, \vec{x}) = \eta^a(t',\, \vec{x}) = 0; \tag{4.75}$$

$$\bar{\eta}_a(t,\, \vec{x}) = \bar{\eta}_a(t',\, \vec{x}) = 0; \tag{4.76}$$

$$\pi_a(t,\, \vec{x}) = \pi_a(t',\, \vec{x}) = 0. \tag{4.77}$$

$t,\, t'$ – границы временного интервала, по которому ведется интегрирование в действии.

Важно, что граничные условия сами являются БРСТ-инвариантными, в чем можно убедиться прямой проверкой.

При разделении духовых переменных на две группы в соответствии с (4.62), (4.63) БРСТ-генератор можно представить в виде

$$\Omega = \int d^3x \left(-i\pi_a\mathcal{P}^a + \varphi_a\eta^a \right) + \Omega', \tag{4.78}$$

где Ω' содержит только духи η^a, сопряженные им импульсы $\bar{\mathcal{P}}_a$ и первоначальные канонические переменные.

Для доказательства БРСТ-инвариантности условий (4.75) – (4.77) нужно рассмотреть изменение η^a, $\bar{\eta}_a$, π_a на границе.

Нетрудно показать также БРСТ-инвариантность действия в общем виде (4.69). Рассмотрим, например, БРСТ-преобразование "кинетической" части действия

$$\delta\left(p_A\dot{q}^A+\pi_a\dot{\lambda}^a+\dot{c}^\alpha\bar{\rho}_\alpha\right)=\delta p_A\dot{q}^A-\dot{p}_A\delta q^A+\delta\pi_a\dot{\lambda}^a-\dot{\pi}_a\delta\lambda^a+\dot{c}^\alpha\delta\bar{\rho}_\alpha-\delta c^\alpha\dot{\bar{\rho}}_\alpha=$$

$$=\{p_A,\,\Omega\}\bar{\varepsilon}\dot{q}^A-\dot{p}_A\{q^A,\,\Omega\}\bar{\varepsilon}+\{\pi_a,\,\Omega\}\bar{\varepsilon}\dot{\lambda}^a-\dot{\pi}_a\{\lambda^a,\,\Omega\}\bar{\varepsilon}+\dot{c}^\alpha\{\bar{\rho}_\alpha,\,\Omega\}\bar{\varepsilon}-\{c^\alpha,\,\Omega\}\bar{\varepsilon}\dot{\bar{\rho}}_\alpha=$$

$$=-\frac{\delta\Omega}{\delta q^A}\dot{q}^A\bar{\varepsilon}-\frac{\delta\Omega}{\delta p_A}\dot{p}^A\bar{\varepsilon}-\frac{\delta\Omega}{\delta\lambda^a}\dot{\lambda}^a\bar{\varepsilon}-\frac{\delta\Omega}{\delta\pi_a}\dot{\pi}^a\bar{\varepsilon}-\dot{c}^\alpha\frac{\delta^l\Omega}{\delta c^\alpha}\bar{\varepsilon}-\dot{\bar{\rho}}_\alpha\frac{\delta^l\Omega}{\delta\bar{\rho}_\alpha}\bar{\varepsilon}=-\frac{d\Omega}{dt}\bar{\varepsilon}. \tag{4.79}$$

Из сохранения во времени величины Ω следует БРСТ-инвариантность данных членов действия (опять-таки с точностью до полных производных по времени от выражений, которые обращаются в 0 на границе временного интервала за счет условий (4.75) – (4.77)).

Гамильтониан $\mathcal{H}_{(0)}$ по определению является БРСТ-инвариантным, то есть

$$\{\mathcal{H}_{(0)},\,\Omega\}=0. \tag{4.80}$$

Наконец, член $\{\bar{\psi},\,\Omega\}$ также БРСТ-инвариантен, в чем нетрудно убедиться, пользуясь тождеством Якоби и условием нильпотентности БРСТ-генератора:

$$\{\{\bar{\psi},\,\Omega\},\,\Omega\}=0. \tag{4.81}$$

Именно условие нильпотентности Ω обеспечивает БРСТ-инвариантность действия (4.69) независимо от выбора функции $\bar{\psi}$.

Отметим также, что, помимо (4.75) – (4.77), существуют другие наборы БРСТ-инвариантных граничных условий.

Теперь мы можем обратиться непосредственно к доказательству теоремы Фрадкина – Вилковыского.

4.7. Доказательство теоремы Фрадкина – Вилковыского

Дадим прямое доказательство независимости континуального интеграла (4.67) – (4.69) от выбора функции $\bar{\psi}$.

Выполним в интеграле (4.67) – (4.69) инфинитезимальное преобразование переменных интегрирования

$$q'^A=q^A+\{q^A,\,\Omega\}\bar{\varepsilon},\ \ldots,\ c'^\alpha=c'^\alpha+\{c^\alpha,\,\Omega\}\bar{\varepsilon}, \tag{4.82}$$

$$\bar{\rho}'_\alpha=\bar{\rho}_\alpha+\{\bar{\rho}_\alpha,\,\Omega\}\bar{\varepsilon} \tag{4.83}$$

с параметром

$$\bar{\varepsilon}=i\int d\tau\left(\bar{\psi}'-\bar{\psi}\right). \tag{4.84}$$

Параметр $\bar{\varepsilon}$ не зависит от пространственно-временных координат. Но он определяется как функционал полевых переменных, и преобразования (4.82) – (4.84) не являются каноническими в расширенном фазовом пространстве (точнее говоря, в бесконечномерном пространстве, которое является прямым произведением расширенного фазового пространства по всем пространственно-временным точкам). Мы убедимся в этом, вычислив якобиан преобразования (4.82) – (4.84): он не равен 1, и, таким образом, следствием преобразования (4.82) – (4.84) является изменение меры.

Поскольку, как уже обсуждалось выше, действие и граничные условия БРСТ-инвариантны, все изменение континуального интеграла сводится к изменению меры. Вычислим якобиан преобразования.

$$q'^A = q^A + \frac{\delta\Omega}{\delta p_A}\bar{\varepsilon}; \tag{4.85}$$

$$\frac{\delta q'^A(x)}{\delta q^B(x')} = \delta^A_B \delta(x-x') + \frac{\delta^2\Omega}{\delta q^B \delta p_A}\delta(x-x')\bar{\varepsilon} +$$
$$+ i\frac{\delta\Omega}{\delta p_A}(x)\frac{\delta(\bar{\psi}'-\bar{\psi})}{\delta q^B}(x'). \tag{4.86}$$

Аналогично,

$$p'_A = p_A - \frac{\delta\Omega}{\delta q^A}\bar{\varepsilon}; \tag{4.87}$$

$$\frac{\delta p'_A(x)}{\delta p_B(x')} = \delta^B_A \delta(x-x') - \frac{\delta^2\Omega}{\delta p_B \delta q^A}\delta(x-x')\bar{\varepsilon} -$$
$$- i\frac{\delta\Omega}{\delta q^A}(x)\frac{\delta(\bar{\psi}'-\bar{\psi})}{\delta p_B}(x'), \tag{4.88}$$

и так далее.

В случае инфинитезимальных преобразований матрица преобразования $\hat{J}$ может быть представлена в виде

$$\hat{J} = \hat{I} + \hat{A}, \tag{4.89}$$

где $\hat{I}$ – единичная матрица, а элементы матрицы $\hat{A}$ – бесконечно малые первого порядка. Тогда сам якобиан

$$J = 1 + \operatorname{Tr}\hat{A} = \exp(\operatorname{Tr}\hat{A}), \tag{4.90}$$

$\operatorname{Tr}\hat{A}$ – след матрицы $\hat{A}$ (сумма ее диагональных элементов), причем элементы, отвечающие нечетным грассмановым степеням свободы, входят в эту сумму со знаком "минус".

Поэтому среди элементов матрицы преобразования (4.85), (4.87) и т. д. нас будут интересовать только диагональные.

$$\operatorname{Tr}\hat{A} = \int d^4x \left[\frac{\delta^2\Omega}{\delta q^A \delta p_A}\delta(x-x')\bar{\varepsilon} + i\frac{\delta\Omega}{\delta p_A}(x)\frac{\delta(\bar{\psi}'-\bar{\psi})}{\delta q^A}(x) -\right.$$
$$-\frac{\delta^2\Omega}{\delta p_A \delta q^A}\delta(x-x')\bar{\varepsilon} - i\frac{\delta\Omega}{\delta q^A}(x)\frac{\delta(\bar{\psi}'-\bar{\psi})}{\delta p_A}(x) +$$

$$+\frac{\delta^2\Omega}{\delta\lambda^a\delta\pi_a}\delta(x-x')\bar{\varepsilon}+i\frac{\delta\Omega}{\delta\pi_a}(x)\frac{\delta(\bar{\psi}'-\bar{\psi})}{\delta\lambda^a}(x)-$$

$$-\frac{\delta^2\Omega}{\delta\pi_a\delta\lambda^a}\delta(x-x')\bar{\varepsilon}-i\frac{\delta\Omega}{\delta\lambda^a}(x)\frac{\delta(\bar{\psi}'-\bar{\psi})}{\delta\pi_a}(x)-$$

$$-\frac{\delta^r}{\delta c^\alpha}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\bar{\rho}_\alpha}\delta(x-x')\bar{\varepsilon}-i\frac{\delta^l\Omega}{\delta\bar{\rho}_\alpha}(x)\frac{\delta^r(\bar{\psi}'-\bar{\psi})}{\delta c^\alpha}(x)-$$

$$-\frac{\delta^r}{\delta\bar{\rho}_\alpha}\frac{\delta^l\Omega}{\delta c^\alpha}\delta(x-x')\bar{\varepsilon}-i\frac{\delta^l\Omega}{\delta c^\alpha}(x)\frac{\delta^r(\bar{\psi}'-\bar{\psi})}{\delta\bar{\rho}_\alpha}(x)\Bigg]=$$

$$=-i\int d^4x\{\Omega,\ \bar{\psi}'-\bar{\psi}\}. \tag{4.91}$$

Таким образом,

$$D\mu'=\exp\left(-i\int d^4x\{\Omega,\ \bar{\psi}'-\bar{\psi}\}\right)D\mu \tag{4.92}$$

Подстановка выражения (4.92) в (4.67) приводит к замене в действии (4.69) функции $\bar{\psi}$ функцией $\bar{\psi}'$, что завершает доказательство теоремы Фрадкина – Вилковыского.

Необходимо подчеркнуть, что доказательство является чисто формальным и не использует определение континуального интеграла как предела конечномерного интеграла.

4.8. Другие примеры выбора функции, фиксирующей калибровку

Обратимся теперь к рассмотрению полей Янга – Миллса и изменим определение функции $\bar{\psi}$ (см. (4.72) – (4.73)). Пусть, например,

$$\chi^a=\frac{1}{2}\alpha\delta^{ab}\pi_b-\partial^iA_i^a. \tag{4.93}$$

Такое определение при вычислении скобок Пуассона приведет к изменению члена

$$-\frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\bar{\eta}_a}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\mathcal{P}^a}=-\chi^a\pi_a, \tag{4.94}$$

поэтому

$$\{\bar{\psi},\ \Omega\}=\frac{\delta\bar{\psi}}{\delta A_i^a}\frac{\delta\Omega}{\delta p_a^i}-\frac{\delta\bar{\psi}}{\delta p_a^i}\frac{\delta\Omega}{\delta A_i^a}+\frac{\delta\bar{\psi}}{\delta A_0^a}\frac{\delta\Omega}{\delta\pi_a}-\frac{\delta\bar{\psi}}{\delta\pi_a}\frac{\delta\Omega}{\delta A_0^a}-$$

$$-\frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\eta^a}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\bar{\mathcal{P}}_a}-\frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\bar{\mathcal{P}}_a}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\eta^a}-\frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\bar{\eta}_a}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\mathcal{P}^a}-\frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\mathcal{P}^a}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\bar{\eta}_a}=$$

$$=i\partial^i\bar{\eta}_aD_i\eta^a-i\bar{\mathcal{P}}_a\mathcal{P}^a+A_0^aD_ip_a^i+A_0^agf^b{}_{ac}\bar{\mathcal{P}}_b\eta^c-\frac{1}{2}\alpha\delta^{ab}\pi_a\pi_b+\partial^iA_i^a\pi_a. \tag{4.95}$$

Эффективное действие

$$S_{(eff)} = \int d^4x \left(p^i_a \dot{A}^a_i + \pi_a \dot{A}^a_0 + \dot{\eta}^a \bar{\mathcal{P}}_a + \dot{\mathcal{P}}^a \bar{\eta}_a + \frac{1}{2} p^i_a p^a_i - \frac{1}{4} F^a_{ij} F^{ij}_a + \{\bar{\psi},\, \Omega\} \right) =$$

$$= \int d^4x \left(p^i_a \dot{A}^a_i + \dot{\eta}^a \bar{\mathcal{P}}_a + \dot{\mathcal{P}}^a \bar{\eta}_a + \frac{1}{2} p^i_a p^a_i - \frac{1}{4} F^a_{ij} F^{ij}_a - \right.$$

$$\left. - i\bar{\eta}_a \partial^i D_i \eta^a - i\bar{\mathcal{P}}_a \mathcal{P}^a + A^a_0 D_i p^i_a + A^a_0 g f^b{}_{ac} \bar{\mathcal{P}}_b \eta^c - \frac{1}{2} \alpha \delta^{ab} \pi_a \pi_b + \pi_a \partial^\mu A^a_\mu \right). \tag{4.96}$$

Подставив это выражение для эффективного действия в континуальный интеграл, мы можем последовательно выполнить интегрирование по импульсам $\bar{\mathcal{P}}_a$, $\mathcal{P}^a$, π_a. Действительно, интегрирование по $\bar{\mathcal{P}}_a$ дает нам

$$\delta \left(-i\mathcal{P}^a - \dot{\eta}^a + g f^a{}_{bc} A^b_0 \eta^c \right), \tag{4.97}$$

так что интегрирование по $\mathcal{P}^a$ приводит к замене (4.6) в действии (4.96). Действие принимает вид:

$$S_{(eff)} = \int d^4x \left(p^i_a \dot{A}^a_i + \frac{1}{2} p^i_a p^a_i - \frac{1}{4} F^a_{ij} F^{ij}_a - i\bar{\eta}_a \partial^0 D_0 \eta^a - i\bar{\eta}_a \partial^i D_i \eta^a + A^a_0 D_i p^i_a - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \alpha \delta^{ab} \pi_a \pi_b + \pi_a \partial^\mu A^a_\mu \right). \tag{4.98}$$

Остается взять гауссов интеграл по π_a:

$$\int \prod_x \prod_a d\pi_a(x) \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \alpha \delta^{ab} \pi_a \pi_b + \pi_a \partial^\mu A^a_\mu \right) \right] =$$

$$= \exp \left[i \int d^4x \frac{1}{2\alpha} \delta^{ab} \left(\partial_\mu A^\mu_a \right) \left(\partial_\nu A^\nu_b \right) \right]. \tag{4.99}$$

Итак, мы получили эффективное действие для лоренцевой α-калибровки:

$$S_{(eff)} = \int d^4x \left[p^i_a \dot{A}^a_i + \frac{1}{2} p^i_a p^a_i - \frac{1}{4} F^a_{ij} F^{ij}_a + \right.$$

$$\left. + A^a_0 D_i p^i_a - i\bar{\eta}_a \partial^\mu D_\mu \eta^a + \frac{1}{2\alpha} \left(\partial_\mu A^\mu_a \right) \left(\partial^\nu A^a_\nu \right) \right]. \tag{4.100}$$

Теперь рассмотрим случай, когда χ^a является функцией только пространственных компонент векторного потенциала A^a_i и сопряженных им импульсов p^i_a:

$$\chi^a = -\frac{1}{\beta} \tilde{\chi}^a \left(A^a_i,\, p^i_a \right). \tag{4.101}$$

где β – произвольный параметр, от которого определенная через континуальный интеграл амплитуда перехода не должна зависеть в силу теоремы Фрадкина – Вилковыского, а $\tilde{\chi}^a$ – такая функция, что

$$\det \|\{\tilde{\chi}^a,\ \varphi_b\}\| \neq 0. \tag{4.102}$$

Вновь вычислим скобку Пуассона величины $\bar{\psi}$, определенной формулами (4.72), (4.101) и генератора БРСТ-преобразований

$$\Omega = \int d^3x \left(\eta^a\varphi_a - i\pi_a\mathcal{P}^a + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{P}}_a g f^a{}_{bc}\eta^b\eta^c\right) \tag{4.103}$$

(для нас сейчас не важен явный вид связей φ_a).

$$\{\bar{\psi},\ \Omega\} = -i\bar{\eta}_b\frac{1}{\beta}\frac{\delta\tilde{\chi}^b}{\delta A_i^a}\frac{\delta\varphi_c}{\delta p_a^i}\eta^c + i\bar{\eta}_b\frac{1}{\beta}\frac{\delta\tilde{\chi}^b}{\delta p_a^i}\frac{\delta\varphi_c}{\delta A_i^a}\eta^c -$$

$$-i\bar{\mathcal{P}}_a\mathcal{P}^a - A_0^a\varphi_a + A_0^a g f^b{}_{ac}\bar{\mathcal{P}}_b\eta^c + \frac{1}{\beta}\tilde{\chi}^a\pi_a. \tag{4.104}$$

Подстановка в эффективное действие дает

$$S_{(eff)} = \int d^4x \left(p_a^i\dot{A}_i^a + \pi_a\dot{A}_0^a + \dot{\eta}^a\bar{\mathcal{P}}_a + \dot{\mathcal{P}}^a\bar{\eta}_a + \frac{1}{2}p_a^i p_i^a -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij} - i\bar{\eta}_b\frac{1}{\beta}\{\tilde{\chi}^b,\ \varphi_c\}\eta^c - i\bar{\mathcal{P}}_a\mathcal{P}^a - A_0^a\varphi_a + A_0^a g f^b{}_{ac}\bar{\mathcal{P}}_b\eta^c + \frac{1}{\beta}\tilde{\chi}^a\pi_a\right). \tag{4.105}$$

Сделаем в континуальном интеграле с эффективным действием (4.105) замену переменных

$$\bar{\eta}_a = \beta\bar{\eta}'_a;\ \pi_a = \beta\pi'_a. \tag{4.106}$$

Якобиан такого преобразования, очевидно, равен 1. Как уже упоминалось, в соответствие с теоремой Фрадкина – Вилковыского континуальный интеграл не может зависеть от β. Перейдем к пределу $\beta \to 0$. Эффективное действие примет вид:

$$\lim_{\beta\to 0} S_{(eff)} = \int d^4x \left(p_a^i\dot{A}_i^a + \dot{\eta}^a\bar{\mathcal{P}}_a + \frac{1}{2}p_a^i p_i^a -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij} - i\bar{\eta}'_a\{\tilde{\chi}^a,\ \varphi_b\}\eta^b - i\bar{\mathcal{P}}_a\mathcal{P}^a - A_0^a\varphi_a + A_0^a g f^b{}_{ac}\bar{\mathcal{P}}_b\eta^c + \tilde{\chi}^a\pi'_a\right). \tag{4.107}$$

Так же, как в рассмотренном выше случае, мы можем провести интегрирование по $\bar{\mathcal{P}}_a$, $\mathcal{P}^a$, в результате чего получим

$$S_{(eff)} = \int d^4x \left(p_a^i\dot{A}_i^a + \frac{1}{2}p_a^i p_i^a - \frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij} - i\bar{\eta}'_a\{\tilde{\chi}^a,\ \varphi_b\}\eta^b - A_0^a\varphi_a + \tilde{\chi}^a\pi'_a\right). \tag{4.108}$$

Интегрирование по π'_a даст δ-функцию от $\tilde{\chi}^a$, интегрирование по калибровочным переменным A_0^a – δ-функцию от связей. Выполняя также интегрирование по духовым переменным $\bar{\eta}'_a$, η^a, приведем исходный континуальный интеграл к форме

$$\int \prod_x \prod_{a,i} dp_a^i(x) dA_i^a(x) \exp\left[i \int d^4x \left(p_a^i \dot{A}_i^a + \frac{1}{2} p_a^i p_i^a - \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} \right) \right] \times$$

$$\times \prod_x \prod_a \left[\delta\left(\varphi_a(x)\right) \delta\left(\tilde{\chi}^a(x)\right) \right] \det \| \{ \tilde{\chi}^a, \, \varphi_b \} \|. \tag{4.109}$$

Мы получили континуальный интеграл Фаддеева – Попова в канонической форме. Наличие δ-функций в континуальном интеграле (4.109) обеспечивает возможность перехода к редуцированному фазовому пространству. Напомним, что калибровка вида

$$\tilde{\chi}^a \left(A_i^b, \, p_b^i \right) = 0; \tag{4.110}$$

$$\det \| \{ \tilde{\chi}^a, \, \varphi_b \} \| \neq 0 \tag{4.111}$$

называется канонической.

Если мы выберем χ^a не зависящей от импульсов, а параметр β – не равным 0 (скажем, $\beta = 1$), после выполнения интегрирования по импульсам мы получим эффективное действие Фаддеева – Попова в лагранжевой форме для релятивистской (или "неканонической") калибровки

$$\dot{A}_0^a - \chi^a \left(A_i^b \right) = 0. \tag{4.112}$$

(Рассмотренная выше калибровка Лоренца является частным случаем релятивистской калибровки.)

Таким образом, выражение (4.69) для эффективного действия Баталина – Фрадкина – Вилковыского охватывает известные нам представления континуального интеграла (представления Фаддеева – Попова в лагранжевой и гамильтоновой форме, α-калибровка), а также заключает в себе широкое разнообразие других возможностей. Однако, не любой выбор $\bar{\psi}$ приводит к корректному выражению для континуального интеграла. Например, простейший выбор $\bar{\psi} = 0$ неприемлем, поскольку в этом случае мы получаем плохо определенное выражение вида $\delta(0)$ умноженная на 0, которое означает отсутствие регуляризации континуального интеграла.

4.9. Каноническое квантование в расширенном фазовом пространстве и эквивалентность с другими методами квантования

Как известно, метод континуального интегрирования в квантовой механике является альтернативой каноническому (операторному) методу квантования. Волновая функция (вектор состояния), определяемая через континуальный интеграл, удовлетворяет уравнению Шредингера, которое может быть получено как непосредственно из континуального интеграла, так и из гамильтоновых уравнений движения в операторной форме путем стандартной процедуры.

Если подлежащая квантованию теория является вырожденной (т. е. теорией со связями), не все состояния являются физическими. Возникает необходимость в правилах отбора физических состояний из полного множества решений уравнения Шредингера. В рамках канонического квантования эта задача была исследована Дираком, который предложил, чтобы физические состояния отбирались с помощью условий

$$\hat{G}_\alpha \,|\, \psi^D >= 0. \tag{4.113}$$

Эти условия представляют собой операторную формулировку связей, существующих в классической теории, а "дираковский" вектор состояния $|\,\psi^D>$ определен в пространстве исходных переменных теории (не включающем духи).

Можно показать, что если вектор состояния определен через континуальный интеграл, наложение квантового (операторного) условия (4.113) на вектор состояния эквивалентно введению в континуальном интеграле соответствующих граничных условий, обеспечивающих калибровочную инвариантность.

Это утверждение можно проиллюстрировать следующим образом опять же на примере полей Янга – Миллса. Там одна из связей дает нам

$$\hat{\pi}_a \,|\, \psi^D >= 0. \tag{4.114}$$

Иными словами, это условие означает, что вектор состояния не зависит от переменных A_0^a:

$$\frac{\delta}{\delta A_0^a} \,|\, \psi^D >= 0. \tag{4.115}$$

Если волновая функция определена через континуальный интеграл, ее независимость от A_0^a обеспечивается граничными условиями

$$\pi_a(t,\ \vec{x}) = \pi_a(t',\ \vec{x}) = 0. \tag{4.116}$$

В континуальном интеграле выбирается "диагональное" представление для π_a (т. е. импульсы π_a фиксированы на концах временного отрезка), в то время как по сопряженным им переменным происходит интегрирование в граничных точках, и поэтому интеграл в целом не зависит от A_0^a. Граничные условия (4.116) входят в набор условий, обеспечивающих калибровочную инвариантность континуального интеграла.

Для связей $\varphi_a = 0$ утверждение об эквивалентности квантового условия (4.113) на вектор состояния введению соответствующих граничных условий в континуальном интеграле доказывается более сложно.

С классической точки зрения, наблюдаемыми являются функции переменных фазового пространства, которые имеют по крайней мере "слабо исчезающие" скобки Пуассона со связями

$$\{B,\ G_\alpha\} = d_\alpha^\beta G_\beta \approx 0. \tag{4.117}$$

(иначе говоря, скобки Пуассона обращаются в 0 на поверхности связей). Таким образом, наблюдаемые не изменяются при калибровочных преобразованиях, генерируемых связями. При переходе к квантовой теории скобки Пуассона заменяются соответствующим коммутатором

$$\{B,\ G_\alpha\} \to -i[\hat{B},\ \hat{G}_\alpha], \tag{4.118}$$

и операторное равенство

$$[\hat{B},\ \hat{G}_\alpha] = \hat{d}_\alpha^\beta \hat{G}_\beta \tag{4.119}$$

в совокупности с условиями (4.113) на вектор состояния обеспечивают инвариантность матричного элемента величины $\hat{B}$ между двумя физическими состояниями при замене наблюдаемой $\hat{B}$ другой наблюдаемой

$$\hat{B}' = \hat{B} - i[\hat{B},\ \hat{G}_\alpha]\varepsilon^\alpha; \tag{4.120}$$

$$\begin{aligned} &< \psi_1^D \,|\, \hat{B}' \,|\, \psi_2^D > = < \psi_1^D \,|\, \hat{B} - i[\hat{B},\ \hat{G}_\alpha]\varepsilon^\alpha \,|\, \psi_2^D > = \\ &= < \psi_1^D \,|\, \hat{B} - i\varepsilon^\alpha \hat{d}_\alpha^\beta \hat{G}_\beta \,|\, \psi_2^D > = < \psi_1^D \,|\, \hat{B} \,|\, \psi_2^D > \ . \end{aligned} \tag{4.121}$$

Говорят, что наблюдаемые B и B', которые отличаются друг от друга на члены, пропорциональные связям, эквивалентны (входят в один и тот же класс эквивалентности).

Работа с континуальным интегралом в расширенном фазовом пространстве подсказывает нам, что можно развить альтернативный подход канонического квантования в расширенном фазовом пространстве, и так же, как и в случае квантования по Дираку, осуществлять отбор физических состояний с помощью квантовых условий, накладываемых на вектор состояния, а не с помощью граничных условий в континуальном интеграле.

Можно показать, что введение в континуальный интеграл Баталина – Фрадкина – Вилковыского в расширенном фазовом пространстве граничных условий, обеспечивающих БРСТ-инвариантность, эквивалентно наложению следующего квантового условия на вектор состояния:

$$\hat{\Omega} \,|\, \psi^{BFV} > = 0. \tag{4.122}$$

Вектор состояния $|\,\psi^{BFV} >$ определен в расширенном конфигурационном пространстве, включающем духовые степени свободы.

Наблюдаемыми в этом подходе являются БРСТ-инвариантные величины, т. е. величины, скобки Пуассона которых с генератором Ω равны 0:

$$\{B,\ \Omega\} = 0. \tag{4.123}$$

В квантовой теории требование равенства 0 скобок Пуассона заменяется требованием того, чтобы $\hat{B}$ и $\hat{\Omega}$ коммутировали. Духовое число наблюдаемых равно 0.

Ясно, что наблюдаемая B останется БРСТ-инвариантной, если к ней добавить скобку Пуассона произвольной функции с генератором Ω:

$$\{B + \{\bar{K},\ \Omega\},\ \Omega\} = \{B,\ \Omega\} + \{\{\bar{K},\ \Omega\},\ \Omega\} = 0. \tag{4.124}$$

Величины, отличающиеся друг от друга членами, которые представляют собой скобки Пуассона некоторой нечетной функции с генератором Ω, являются эквивалентными. В частности, можно сказать, что регуляризация континуального интеграла, предложенная Баталиным, Фрадкиным и Вилковыским, осуществляется путем замены в действии БРСТ-инвариантного гамильтониана $\mathcal{H}_{(0)}$ эквивалентной ему величиной $\mathcal{H}_{(0)} - \{\bar{\psi},\ \Omega\}$.

Для матричного элемента наблюдаемой $\hat{B}$ имеем:

$$< \psi_1^{BFV} \,|\, \hat{B}' \,|\, \psi_2^{BFV} > = < \psi_1^{BFV} \,|\, \hat{B} - i\left[\hat{\bar{K}},\ \hat{\Omega}\right]_+ \,|\, \psi_2^{BFV} > =$$

$$= < \psi_1^{BFV} \,|\, \hat{B} \,|\, \psi_2^{BFV} > \, - i \, < \psi_1^{BFV} \,|\, \hat{\bar{K}}\hat{\Omega} \,|\, \psi_2^{BFV} > \, -$$
$$- i \, < \psi_1^{BFV} \,|\, \hat{\Omega}\hat{\bar{K}} \,|\, \psi_2^{BFV} > = < \psi_1^{BFV} \,|\, \hat{B} \,|\, \psi_2^{BFV} > \tag{4.125}$$

в силу условия (4.122). Скобка Пуассона нечетных величин при переходе к квантовой теории заменяется антикоммутатором.

Условие нильпотентности для оператора $\hat{\Omega}$ есть

$$\left[\hat{\Omega},\ \hat{\Omega}\right]_+ = 2\hat{\Omega}^2 = 0. \tag{4.126}$$

Отсюда следует, что состояние

$$\hat{\Omega} \,|\, \psi_0^{BFV} > \tag{4.127}$$

является физическим для любого вектора состояния $|\, \psi_0^{BFV} >$. Однако, вектор состояния (4.127) имеет нулевую норму, и матричный элемент любой наблюдаемой между таким состоянием и другим физическим состоянием с необходимостью равен 0:

$$< \psi_1^{BFV} \,|\, \hat{B}\hat{\Omega} \,|\, \psi_0^{BFV} > = < \psi_1^{BFV} \,|\, \hat{\Omega}\hat{B} \,|\, \psi_0^{BFV} > = 0. \tag{4.128}$$

Два физических состояния, которые отличаются на $\hat{\Omega} \,|\, \psi_0^{BFV} >$, должны рассматриваться как одинаковые физические состояния.

Теперь мы покажем, что квантование в расширенном фазовом пространстве эквивалентно дираковскому каноническому квантованию, если физические состояния в рассматриваемом подходе отбираются с помощью условия (4.122).

Мы будем рассматривать случай, когда связи G_α строго коммутируют между собой (т. е. структурные функции первого порядка равны 0). Можно доказать, что поверхность связей может быть представлена набором коммутирующих между собой связей, эквивалентных исходному набору связей, существующих в теории. В классической теории БРСТ-генераторы, построенные по эквивалентным наборам связей, связаны между собой каноническим преобразованием в расширенном фазовом пространстве.

Пусть в классической теории

$$G_\alpha = a_\alpha^\beta F_\beta,\ \det \|a_\alpha^\beta\| \neq 0, \tag{4.129}$$

где связи F_α таковы, что их скобки Пуассона между собой строго равны 0. Тогда можно ожидать, что в квантовой теории операторы $\hat{G}_\alpha$ и $\hat{F}_\alpha$ удовлетворяют соотношениям

$$\hat{G}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\beta \hat{F}_\beta, \tag{4.130}$$

причем операторы $\hat{a}_\alpha^\beta$ не имеют нулевых собственных значений.

Следовательно, условия (4.113) эквивалентны условиям

$$\hat{F}_\alpha \,|\, \psi^D >= 0. \tag{4.131}$$

Поскольку операторы $\hat{F}_\alpha$ коммутируют, мы можем совершить каноническое преобразование в исходном фазовом пространстве, такое, что величины F_α станут новыми импульсами p_α. Квантовые условия

$$\hat{p}_\alpha \,|\, \psi^D >= 0 \tag{4.132}$$

тогда будут означать, что физические состояния в дираковском подходе являются независимыми от обобщенных координат, сопряженных импульсам p_α. Эти координаты представляют собой калибровочные степени свободы.

Кроме того, из каждого класса эквивалентности, в которые объединяются наблюдаемые, мы можем выбрать таких представителей, которые "сильно" коммутируют со связями, т. е., в данном случае,

$$[\hat{B},\ \hat{p}_\alpha] = 0. \tag{4.133}$$

Действительно, положив $p_\alpha = 0$ в классическом определении наблюдаемой B, мы, по-существу, перейдем к новой наблюдаемой B', независимой от p_α, причем наблюдаемые B и B' совпадают на поверхности связей. Поэтому B и B' принадлежат одному и тому же классу эквивалентности – можно считать, что они отличаются на линейную комбинацию связей

$$B' = B + K^\alpha p_\alpha. \tag{4.134}$$

Скобки Пуассона наблюдаемой B' со связями p_α по определению сводятся к линейной комбинации связей. Но поскольку B' не зависит от p_α, ее скобки Пуассона с p_α также не могут зависеть от p_α, и, следовательно, строго равны 0, что приводит к квантовому операторному уравнению (4.133). Из того, что скобки Пуассона B' с p_α строго равны 0, вытекает также, что B' не зависит не только от p_α, но и от сопряженных им координат q^α:

$$\{B',\ p_\alpha\} = \frac{\delta B'}{\delta q^\alpha} = 0. \tag{4.135}$$

Тем самым мы показали, что наблюдаемые могут быть выбраны таким образом, что они независимы от импульсов p_α и сопряженных им координат q^α и являются функциями только от остальных канонических переменных.

Квантовый генератор $\hat{\Omega}$, соответствующий системе коммутирующих связей $\{p_\alpha\}$, имеет простой вид:

$$\hat{\Omega} = \hat{c}^\alpha \hat{p}_\alpha \tag{4.136}$$

(присутствует лишь член, содержащий структурные функции нулевого порядка в разложении по степеням духов),

Далее, вектор состояния, определенный в расширенном конфигурационном пространстве, также можно представить в виде разложения по степеням духов:

$$|\, \psi^{BFV} >= \,|\, \psi^{(0)} > \,+ |\, \psi^{(1)}_\alpha > \, c^\alpha + \,|\, \psi^{(2)}_{\alpha\beta} > \, c^\alpha c^\beta + \ldots \tag{4.137}$$

причем состояния $|\,\psi^{(0)}>$, $|\,\psi^{(1)}_{\alpha}>$, $|\,\psi^{(2)}_{\alpha\beta}>$ и т. д. не включают духовых переменных, т. е. существуют в том же самом пространстве, где определены дираковские вектора состояний.

Действие оператора $\hat{\Omega}$ на вектор $|\,\psi^{BFV}>$ есть

$$\hat{\Omega}\,|\,\psi^{BFV}>=\hat{p}_{\alpha}\,|\,\psi^{(0)}>\,c^{\alpha}+\hat{p}_{\alpha}\,|\,\psi^{(1)}_{\beta}>\,c^{\alpha}c^{\beta}+\ldots \tag{4.138}$$

Из условия (4.122) вытекает:

$$\hat{p}_{\alpha}\,|\,\psi^{(0)}>=0; \tag{4.139}$$

$$\hat{p}_{\alpha}\,|\,\psi^{(1)}_{\beta}>\,-\hat{p}_{\beta}\,|\,\psi^{(1)}_{\alpha}>=0, \tag{4.140}$$

и т. д. Отсюда также следует, что физические состояния остаются неизменными при замене

$$|\,\psi^{(1)}_{\alpha}>\to\,|\,\psi^{(1)}_{\alpha}>\,+\hat{p}_{\alpha}\,|\,\psi^{(0)}>; \tag{4.141}$$

$$|\,\psi^{(2)}_{\alpha\beta}>\to\,|\,\psi^{(2)}_{\alpha\beta}>\,+\hat{p}_{\alpha}\,|\,\psi^{(1)}_{\beta}>\,-\hat{p}_{\beta}\,|\,\psi^{(1)}_{\alpha}>, \tag{4.142}$$

и т. д. Такая замена соответствует добавлению к вектору состояния $|\,\psi^{BFV}>$ вектора с нулевой нормой $\hat{\Omega}\,|\,\psi^{BFV}>$:

$$|\,\psi^{BFV}>\to\,|\,\psi^{BFV}>\,+\hat{\Omega}\,|\,\psi^{BFV}>\,=\,|\,\psi^{(0)}>\,+\big(\,|\,\psi^{(1)}_{\alpha}>\,+\hat{p}_{\alpha}\,|\,\psi^{(0)}>\big)\,c^{\alpha}+$$

$$+\Big(\,|\,\psi^{(2)}_{\alpha\beta}>\,+\hat{p}_{\alpha}\,|\,\psi^{(1)}_{\beta}>\Big)\,c^{\alpha}c^{\beta}+\ldots \tag{4.143}$$

Эта замена возможна благодаря тому, что квантовый БРСТ-генератор удовлетворяет условию нильпотентности (4.126).

Возможность преобразований (4.141), (4.142) и т. д. позволяет занулить все члены разложения (4.137) выше нулевого порядка ($|\,\psi^{(1)}_{\alpha}>$, $|\,\psi^{(2)}_{\alpha\beta}>$ и т. д.) путем добавления к вектору состояния (4.137) вектора с нулевой нормой. Преобразование (4.143) не затрагивает член разложения нулевого порядка, который удовлетворяет условию (4.139). Следовательно, из каждого класса эквивалентности физических состояний может быть выбран представитель

$$|\,\psi^{BFV}>=\,|\,\psi^{(0)}>, \tag{4.144}$$

который не зависит от духовых переменных по определению и от калибровочных переменных в силу условия (4.139). Поэтому мы вправе отождествить вектор $|\,\psi^{(0)}>$ с дираковским вектором состояния:

$$|\,\psi^{(0)}>=\,|\,\psi^{D}>\,. \tag{4.145}$$

Соотношения (4.144), (4.145) устанавливают эквивалентность векторов состояния при квантовании по Дираку и при квантовании в расширенном фазовом пространстве.

В литературе иногда встречаются утверждения, что отбор векторов состояний из каждого класса эквивалентности (4.143) можно осуществлять с помощью дополнительного условия

$$\hat{\bar{\Omega}}\,|\,\psi^{BFV}>=0, \tag{4.146}$$

где $\hat{\bar{\Omega}}$ – так называемый генератор "анти-БРСТ" преобразований. В случае коммутирующих связей, который мы сейчас рассматриваем, генератор Ω имеет вид

$$\Omega = c^{\alpha} F_{\alpha}, \tag{4.147}$$

а генератор $\bar{\Omega}$ –

$$\bar{\Omega} = \bar{\rho}_{\beta} F_{\alpha} \varepsilon^{\alpha\beta}; \tag{4.148}$$

$\varepsilon^{\alpha\beta}$ – постоянный тензор, антисимметричный в том случае, когда связи коммутируют:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}. \tag{4.149}$$

Далее, $\bar{\Omega}$ можно представить как скобку Пуассона некоторой величины $\bar{S}$ и генератора Ω:

$$\bar{\Omega} = \{\bar{S},\ \Omega\}. \tag{4.150}$$

В данном случае $\bar{S}$ имеет вид:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{\rho}_{\alpha} \bar{\rho}_{\beta}; \tag{4.151}$$

$$\{\bar{S},\ \Omega\} = -\frac{\delta^r \bar{S}}{\delta \bar{\rho}_{\alpha}} \frac{\delta^l \Omega}{\delta c^{\alpha}} = -\varepsilon^{\beta\alpha} \bar{\rho}_{\beta} F_{\alpha}. \tag{4.152}$$

$\hat{\bar{\Omega}}$ является нильпотентным и антикоммутирующим с $\hat{\Omega}$:

$$\left[\hat{\bar{\Omega}},\ \hat{\bar{\Omega}}\right]_{+} = \left[\hat{\bar{\Omega}},\ \hat{\Omega}\right]_{+} = 0. \tag{4.153}$$

Из условий (4.122), (4.146)

$$\hat{c}^{\alpha} \hat{F}_{\alpha} \,|\, \psi^{BFV} >= 0; \tag{4.154}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \hat{\bar{\rho}}_{\beta} \hat{F}_{\alpha} \,|\, \psi^{BFV} >= 0 \tag{4.155}$$

в силу независимости духовых переменных $\{c^{\alpha}\}$ и сопряженных им импульсов $\{\bar{\rho}_{\alpha}\}$ вытекают условия

$$\hat{F}_{\alpha} \,|\, \psi^{BFV} >= 0, \tag{4.156}$$

что, из сопоставления со (4.131) позволяет отождествить

$$|\, \psi^{BFV} >= |\, \psi^{D} > . \tag{4.157}$$

Как мы знаем, электродинамика как раз-таки представляет собой случай коммутирующих связей. Генератор Ω, записанный в переменных $(\eta,\ \bar{\eta},\ \mathcal{P},\ \bar{\mathcal{P}})$

$$c^{\alpha} = (-i\mathcal{P},\ \eta); \tag{4.158}$$

$$\bar{\rho}_{\alpha} = (i\bar{\eta},\ \bar{\mathcal{P}}); \tag{4.159}$$

имеет вид

$$\Omega = -\eta \partial_i p^i - i\mathcal{P}\pi. \tag{4.160}$$

Выбирая

$$\varepsilon^{12} = -i, \tag{4.161}$$

получим генератор "анти-БРСТ" преобразований

$$\bar{\Omega} = -\bar{\eta}\partial_i p^i - i\bar{\mathcal{P}}\pi, \tag{4.162}$$

так что выражения (4.160), (4.162) обладают определенной симметрией.

Эта симметрия связана с тем, что в электродинамике духи η, $\bar{\eta}$ симметрично входят в эффективное действие:

$$S_{(ghost)} = -i\int d^4x\bar{\eta}\partial_\mu\partial^\mu\eta = -i\int d^4x\eta\partial_\mu\partial^\mu\bar{\eta}. \tag{4.163}$$

(оператор Фаддеева – Попова $\hat{M} = \partial_\mu\partial^\mu$ является самосопряженным). Вследствие этого полное действие инвариантно не только относительно БРСТ-преобразований, генерируемых Ω,

$$\delta A_i = \partial_i\eta\bar{\varepsilon}; \tag{4.164}$$

$$\delta A_0 = -i\mathcal{P}\bar{\varepsilon}; \tag{4.165}$$

$$\delta\bar{\eta} = i\pi\bar{\varepsilon}; \tag{4.166}$$

$$\delta\bar{\mathcal{P}} = \partial_i p^i\bar{\varepsilon}; \tag{4.167}$$

$$\delta\eta = \delta p^i = \delta\pi = \delta\mathcal{P} = 0, \tag{4.168}$$

но также относительно "анти-БРСТ" преобразований, генерируемых $\bar{\Omega}$ (получающихся из (4.164) – (4.168) заменой η на $\bar{\eta}$, $\mathcal{P}$ на $\bar{\mathcal{P}}$, ε на $\bar{\varepsilon}$):

$$\delta A_i = \partial_i\bar{\eta}\varepsilon; \tag{4.169}$$

$$\delta A_0 = -i\bar{\mathcal{P}}\varepsilon; \tag{4.170}$$

$$\delta\eta = i\pi\varepsilon; \tag{4.171}$$

$$\delta\mathcal{P} = \partial_i p^i\varepsilon; \tag{4.172}$$

$$\delta\bar{\eta} = \delta p^i = \delta\pi = \delta\bar{\mathcal{P}} = 0. \tag{4.173}$$

Инвариантность полного действия Фаддеева – Попова относительно преобразований (4.169) – (4.173) доказывается совершенно аналогично тому, как демонстрируется инвариантность действия относительно БРСТ-преобразований (4.164) – (4.169) (удобно использовать самосопряженность оператора $\hat{M}$).

Хотя и допустимо использовать условие (4.146) для отбора векторов состояния из классов эквивалентности, введение генератора "анти-БРСТ" преобразований не несет ясного физического смысла. Необходимо подчеркнуть, что мы рассматриваем "идеализированный" случай коммутирующих связей, что освобождает нас от многих проблем, связанных с упорядочением операторов. Найти набор коммутирующих связей, эквивалентный исходному набору связей, технически невероятно сложно и часто оказывается невозможным. Введение же генератора "анти-БРСТ" преобразований в общем случае, когда связи не коммутируют, порождает дополнительные проблемы при переходе к квантовой теории: нужно удовлетворить не только требованию (4.126) для оператора $\hat{\Omega}$, но и требованиям (4.153) для $\hat{\bar{\Omega}}$.

Обратимся теперь к наблюдаемым. БРСТ-инвариантные наблюдаемые в расширенном фазовом пространстве могут быть представлены в виде БРСТ-инвариантных разложений по степеням духов и духовых импульсов:

$$B = \sum_{n\geq 0} c^{\beta_n}\dots c^{\beta_1} B^{(n)}{}_{\beta_1\dots\beta_n}{}^{\alpha_1\dots\alpha_n}\bar{\rho}_{\alpha_n}\dots\bar{\rho}_{\alpha_1} =$$

$$= B^{(0)} + c^{\beta}B^{(1)}{}_{\beta}{}^{\alpha}\bar{\rho}_{\alpha} + c^{\beta_2}c^{\beta_1}B^{(2)}{}_{\beta_1\beta_2}{}^{\alpha_1\alpha_2}\bar{\rho}_{\alpha_2}\bar{\rho}_{\alpha_1} + \dots \qquad (4.174)$$

Разложение (4.174) удовлетворяет условиям:

1) Нулевой член разложения $B^{(0)}$ совпадает с определением наблюдаемой B как функции координат и импульсов в обычном фазовом пространстве;

2) Величина B является четной вещественной величиной, и ее духовое число равно 0.

Можно показать, что существуют величины $B^{(n)}{}_{\beta_1\dots\beta_n}{}^{\alpha_1\dots\alpha_n}$, такие, что выполняется условие (4.123).

Как уже говорилось выше, B остается БРСТ-инвариантной, если к ней добавить скобку Пуассона произвольной функции $\bar{K}$ с генератором Ω (при этом $\bar{K}$ должна быть нечетной функцией, ее духовое число равно -1). Мы можем воспользоваться этим произволом в определении B для того, чтобы выбрать B независимой от канонически сопряженных пар $(q^{\alpha},\ p_{\alpha})$, соответствующих калибровочным степеням свободы, и духовых переменных $(c^{\alpha},\ \bar{\rho}_{\alpha})$.

В самом деле,

$$\bar{K} = \sum_{n\geq 0} c^{\beta_n}\dots c^{\beta_1} K^{(n)}{}_{\beta_1\dots\beta_n}{}^{\alpha_1\dots\alpha_{n+1}}\bar{\rho}_{\alpha_{n+1}}\dots\bar{\rho}_{\alpha_1} = K^{(0)\alpha}\bar{\rho}_{\alpha} + c^{\beta}K^{(1)}{}_{\beta}{}^{\alpha_1\alpha_2}\bar{\rho}_{\alpha_2}\bar{\rho}_{\alpha_1} +$$

$$+ c^{\beta_2}c^{\beta_1}K^{(2)}{}_{\beta_1\beta_2}{}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\bar{\rho}_{\alpha_3}\bar{\rho}_{\alpha_2}\bar{\rho}_{\alpha_1} + \dots \qquad (4.175)$$

$$\{\bar{K},\ \Omega\} = \frac{\delta\bar{K}}{\delta q^{\alpha}}c^{\alpha} - \frac{\delta^r\bar{K}}{\delta\bar{\rho}_{\alpha}}p_{\alpha} = -K^{(0)\alpha}p_{\alpha} - c^{\beta}\frac{\delta K^{(0)\alpha}}{\delta q^{\beta}}\bar{\rho}_{\alpha} - c^{\beta}K^{(1)}{}_{\beta}{}^{\alpha_1\alpha_2}p_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\alpha_1}\bar{\rho}_{\alpha_2} +$$

$$+ c^{\beta}K^{(1)}{}_{\beta}{}^{\alpha_1\alpha_2}p_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\alpha_2}\bar{\rho}_{\alpha_1} + \dots = -K^{(0)\alpha}p_{\alpha} - c^{\beta}\frac{\delta K^{(0)\alpha}}{\delta q^{\beta}}\bar{\rho}_{\alpha} + 2c^{\beta}K^{(1)}{}_{\beta}{}^{\alpha_1\alpha_2}p_{\alpha_2}\bar{\rho}_{\alpha_1} + \dots \qquad (4.176)$$

$$B + \{\bar{K},\ \Omega\} = B^{(0)} - K^{(0)\alpha}p_{\alpha} + c^{\beta}\left(B^{(1)}{}_{\beta}{}^{\alpha} - \frac{\delta K^{(0)\alpha}}{\delta q^{\beta}} + 2K^{(1)}{}_{\beta}{}^{\alpha\gamma}p_{\gamma}\right)\bar{\rho}_{\alpha} + \dots \qquad (4.177)$$

Мы можем последовательно выбрать величины $K^{(0)\alpha}$, $K^{(1)}{}_{\beta}{}^{\alpha\gamma}$ и т. д. таким образом, чтобы

1) нулевой член разложения $B'^{(0)} = B^{(0)} - K^{(0)\alpha} p_\alpha$ не зависел от q^α и p_α (см. формулу (4.135));

2) все коэффициенты разложения $B'^{(n)}{}_{\beta_1 \dots \beta_n}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ обращались в 0. Иными словами, из каждого класса эквивалентности БРСТ-инвариантных наблюдаемых в расширенном фазовом пространстве может быть выбран представитель, соответствующий наблюдаемой в дираковском смысле. Тем самым устанавливается эквивалентность наблюдаемых в обоих подходах.

Остается показать согласованность скалярных произведений векторов состояний. В подходе Дирака скалярное произведение определяется следующим образом:

$$< \psi_1^D \,|\, \psi_2^D > = \int \prod_A dq^A \prod_\alpha dq^\alpha \prod_\alpha \delta(q^\alpha) \psi_1^{D*}(q^A,\ q^\alpha) \psi_2^D(q^A,\ q^\alpha); \tag{4.178}$$

$\prod\limits_\alpha \delta(q^\alpha)$ присутствует в мере для того, чтобы скалярное произведение оставалось конечным, поскольку вектора состояний не зависят от q^α в силу условий (4.132). Эквивалентно. дираковское скалярное произведение определяется как

$$< \psi_1^D \,|\, \psi_2^D > = \int \prod_A dq^A \psi_1^{D*}(q^A) \psi_2^D(q^A). \tag{4.179}$$

q^A соответствуют физическим (не калибровочным) степеням свободы. По существу, скалярное произведение (4.179) есть скалярное произведение в редуцированном фазовом пространстве.

Скалярное произведение векторов состояний в расширенном фазовом пространстве определим следующим образом:

$$< \psi_1^{BFV} \,|\, \psi_2^{BFV} > = \int \prod_A dq^A \prod_\alpha dq^\alpha \prod_\alpha dc^\alpha \, \psi_1^{BFV*}(q^A,\ q^\alpha,\ c^\alpha) \psi_2^{BFV}(q^A,\ q^\alpha,\ c^\alpha). \tag{4.180}$$

Поскольку, в соответствие со (4.144), вектора состояний в подходе Баталина – Фрадкина – Вилковыского могут быть выбраны не зависящими от духовых и калибровочных степеней свободы, (4.180) переписывается следующим образом:

$$< \psi_1^{BFV} \,|\, \psi_2^{BFV} > = \int \prod_A dq^A \psi_1^{BFV*}(q^A) \psi_2^{BFV}(q^A) \int \prod_\alpha dq^\alpha \prod_\alpha dc^\alpha. \tag{4.181}$$

Интеграл по dq^A в (4.181) является хорошо определенным, в то время как второй сомножитель $\left(\int \prod\limits_\alpha dq^\alpha \prod\limits_\alpha dc^\alpha \right)$ представляет собой математически неопределенное выражение: присутствующие в нем интегралы

$$\int dq^\alpha = \delta(0) \tag{4.182}$$

расходятся, а интегралы по грассмановым переменным дают 0:

$$\int dc^\alpha = 0. \tag{4.183}$$

Поскольку, однако, число интегрирований по грассмановым переменным в этом выражении равно числу интегрирований по обычным (четным) переменным, предполагается, что второй сомножитель в (4.181) можно регуляризовать, определив его, например, как

$$\prod_\alpha \int dq^\alpha dc^\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0} \prod_\alpha \int dq^\alpha dc^\alpha f_\varepsilon(q^\alpha,\ c^\alpha), \tag{4.184}$$

где

$$f_\varepsilon(q^\alpha,\ c^\alpha) = \exp\left(\varepsilon c^\alpha - \pi \varepsilon^2 (q^\alpha)^2\right); \tag{4.185}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(q^\alpha,\ c^\alpha) = 1; \tag{4.186}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \prod_\alpha \int dq^\alpha dc^\alpha \exp\left(\varepsilon c^\alpha - \pi \varepsilon^2 (q^\alpha)^2\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \prod_\alpha \left[\int dq^\alpha \exp\left(-\pi \varepsilon^2 (q^\alpha)^2\right) dc^\alpha \left(1 + \varepsilon c^\alpha\right) \right] = 1. \tag{4.187}$$

Этим завершается доказательство эквивалентности квантования в расширенном фазовом пространстве и дираковского квантования систем со связями.

Необходимо, однако, помнить, что при работе с конкретной теорией, описывающей систему со связями, выбор коммутирующих связей осуществим далеко не всегда. На практике же соответствующие квантовые теории, построенные в результате квантования по Дираку и квантования в расширенном фазовом пространстве, могут оказаться неэквивалентными, в частности, из-за проблемы упорядочения операторов, которая была полностью опущена в данном рассмотрении благодаря удобному выбору связей.

4.10. Метод Баталина – Вилковыского: лагранжев формализм

В предыдущих разделах был рассмотрен метод Баталина – Фрадкина – Вилковыского квантования в расширенном фазовом пространстве, существенно опирающийся на гамильтонову формулировку теории. Метод БФВ обобщает метод Фаддеева – Попова для случая, когда алгебра преобразований, генерируемых связями, является открытой. Баталин и Вилковыский в ряде своих работ предложили также обобщение метода Фаддеева – Попова для лагранжева формализма, т. е. для случая, когда алгебра калибровочных преобразований является открытой.

Калибровочные преобразования и преобразования, генерируемые связями, вообще говоря, не совпадают. В определенных случаях они могут быть согласованы. Так, для теории Янга – Миллса калибровочные преобразования есть

$$\delta A^a_\mu = D_\mu \theta^a. \tag{4.188}$$

В каноническом подходе преобразования для пространственных компонент поля Янга – Миллса генерируются связями $\partial_i p^i_a$ и совпадают с (4.188). Преобразование временной компоненты A_0^a генерируется первичной связью π и, вообще говоря, не равно $D_0\theta^a$. В подходе БФВ преобразование временной компоненты, генерируемое БРСТ-зарядом Ω есть

$$\delta A_0^a = -i\mathcal{P}^a\bar{\varepsilon}. \tag{4.189}$$

В калибровке Лоренца

$$\mathcal{P}^a = iD_0\eta^a. \tag{4.190}$$

Подстановка (4.190) в (4.189) дает

$$\delta A_0^a = D_0\theta^a,\ \theta^a = \eta^a\bar{\varepsilon}. \tag{4.191}$$

В следующей главе мы обсудим теорию гравитации. Там ситуация еще сложнее: как мы увидим, алгебра преобразований, генерируемых связями, является открытой, хотя алгебра калибровочных преобразований закрыта. Таким образом, во всех реалистических теориях (электродинамика, теория Янга – Миллса, гравитация) алгебра калибровочных преобразований закрыта. В этом случае метод Баталина – Вилковыского не дает ничего нового по сравнению с методом Фаддеева – Попова. Тем не менее, для полноты картины мы кратко рассмотрим идею метода Баталина – Вилковыского.

Рассмотрим некоторую калибровочную теорию, описываемую действием

$$S[g]:\ g^i,\ i=1,\ \ldots,\ n. \tag{4.192}$$

$\{g^i\}$ – набор калибровочных полей. Действие $S[g]$ остается инвариантным при калибровочных преобразованиях

$$\delta g^i = R_a^i[g]\theta^a. \tag{4.193}$$

$R_a^i[g]$ – генераторы калибровочных преобразований, θ^a – инфинитезимальные параметры. Алгебра калибровочных преобразований закрыта (является истинной алгеброй Ли), если коммутатор двух калибровочных преобразований есть снова калибровочное преобразование. Генераторы в этом случае должны удовлетворять соотношениям

$$[R_a[g],\ R_b[g]]^i \equiv \frac{\delta R_a^i}{\delta g^k}R_b^k[g] - \frac{\delta R_b^i}{\delta g^k}R_a^k[g] = C^c{}_{ab}R_c^i[g], \tag{4.194}$$

где $C^c{}_{ab}$ – истинные константы, не зависящие от полей g^i. В общем случае, однако, генераторы удовлетворяют соотношениям

$$[R_a[g],\ R_b[g]]^i \equiv \frac{\delta R_a^i}{\delta g^k}R_b^k[g] - \frac{\delta R_b^i}{\delta g^k}R_a^k[g] = C^c{}_{ab}[g]R_c^i[g] - E^{ik}{}_{ab}[g]\frac{\delta S}{\delta g^k}. \tag{4.195}$$

Алгебра является открытой, если $E^{ik}{}_{ab}[g]$ отличны от 0 или $C^c{}_{ab}[g]$ – функции от полей g^i (не константы).

Вообще говоря, набор генераторов определен неоднозначно. Вид генераторов определяется теми преобразованиями полей, при которых инвариантно действие. Следствием инвариантности действия является существование тождеств Нетер. Действительно,

$$\delta S[g(x)] = \int \frac{\delta S[g(x)]}{\delta g^i(x')}\delta g^i(x')d^4x' = \int \frac{\delta S[g(x)]}{\delta g^i(x')}R_a^i[g(x')]\theta^a(x')d^4x', \tag{4.196}$$

откуда из требования $\delta S = 0$ в силу произвольности параметров θ^a следуют тождества Нетер:

$$\frac{\delta S}{\delta g^i} R^i_a[g] = 0. \tag{4.197}$$

Однако тождества Нетер будут также выполняться, если мы перейдем от генераторов $R^i_a[g]$ к другому набору генераторов

$$\tilde{R}^i_a[g] = R^i_b[g] \Lambda^b_a[g] + K^{ik}_{\ a}[g] \frac{\delta S}{\delta g^i}, \tag{4.198}$$

где $\Lambda^b_a[g]$ – обратимая матрица, $K^{ik}_{\ a}[g]$ – антисимметричная по индексам $i,\ k$.

Оказывается, что произволом в определении базиса генераторов можно воспользоваться для того, чтобы выбрать такой базис, который образует замкнутую и даже абелеву алгебру. Именно, произволом в выборе величин $K^{ik}_{\ a}[g]$ можно воспользоваться для того, чтобы алгебра стала замкнутой, после чего выбрать величины $\Lambda^b_a[g]$ таким образом, чтобы сделать алгебру абелевой. Подобным образом в гамильтоновой формулировке с помощью канонического преобразования можно перейти от заданного набора связей к эквивалентному набору коммутирующих связей. Практически, однако, осуществление этой программы наталкивается на огромные технические трудности.

Вернемся к лагранжевой формулировке калибровочной теории, обобщенной на случай открытой алгебры преобразований. Для замыкания алгебры в этом случае вводятся вспомогательные (auxiliary) поля, называемые в литературе также антиполями (antifields). Обозначим исходные переменные теории ϕ^A – в их число входят калибровочные поля g^i, духи, компенсирующие остаточные калибровочные степени свободы, а также можно включить в их число (для согласования с формализмом Фаддеева – Попова) лагранжевы множители при калибровочных условиях. Итак,

$$\phi^A = \left(g^i,\ \eta^a,\ \bar{\eta}_a,\ \pi_a\right). \tag{4.199}$$

Вспомогательные поля принято обозначать как ϕ^*_A; их грассманова четность противоположна четности соответствующих переменных ϕ^A:

$$\phi^*_A:\ P(\phi^*_A) = \left(P(\phi^A) + 1\right) (\mathrm{mod}\ 2). \tag{4.200}$$

Вспомогательные поля расширяют конфигурационное пространство исходных степеней свободы. В этом пространстве строится эффективное действие Баталина – Вилковыского в виде разложения по степеням переменных ϕ^*_A:

$$S[\phi,\ \phi^*] = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^*_{A_n} \ldots \phi^*_{A_1} S^{A_1 \ldots A_n}[\phi]. \tag{4.201}$$

Разложение (4.201) должно удовлетворять следующему условию:

$$S[\phi,\ \phi^*]|_{\phi^*=0} = S[g],\ \{g^i\} \subset \{\phi^A\}, \tag{4.202}$$

т. е. нулевой член разложения – это действие исходной калибровочно-инвариантной теории $S[g]$.

Коэффициенты разложения (4.201) $S^{A_1\cdots A_n}[\phi]$ – свертки структурных функций калибровочной алгебры с грассмановыми переменными η^a, заменяющими инфинитезимальные параметры преобразований (т. е. $S^{A_1\cdots A_n}[\phi]$ – полиномиальные функции переменных η^a). Как следует из (4.202), в качестве структурной функции нулевого порядка выступает действие калибровочной теории. Структурными функциями первого порядка являются генераторы $R^i_a[g]$, структурные функции второго порядка – это величины $C^c{}_{ab}[g]$, $E^{ik}_{ab}[g]$, которые входят в соотношения (4.195), и т. д. Эффективное действие $S[\phi,\ \phi^*]$ является генератором преобразований переменных ϕ (обобщенных БРСТ-преобразований), подобно генератору Ω в расширенном фазовом пространстве.

Определим в расширенном конфигурационном пространстве $(\phi,\ \phi^*)$ бинарную операцию над функциями переменных ϕ, ϕ^*:

$$(F,\ H) = \int \left(\frac{\delta^r F(x)}{\delta\phi^A(x')} \frac{\delta^l H(y)}{\delta\phi^*_A(x')} - \frac{\delta^r F(x)}{\delta\phi^*_A(x')} \frac{\delta^l H(y)}{\delta\phi^A(x')} \right) d^4x'. \tag{4.203}$$

Можно проверить, что

$$(F,\ H) = -(-1)^{(P(F)+1)(P(H)+1)}(H,\ F). \tag{4.204}$$

В частности, если F и H – четные функции, то

$$(F,\ H) = (H,\ F). \tag{4.205}$$

Отсюда следует, что скобка (4.203) четной функции самой с собой не равна 0:

$$(F,\ F) = 2\int \frac{\delta^r F(x)}{\delta\phi^A(x')} \frac{\delta^l F(y)}{\delta\phi^*_A(x')} d^4x' \neq 0. \tag{4.206}$$

Определим преобразования переменных ϕ с помощью операции (4.203):

$$\delta\phi^A = (\phi^A,\ S)\bar{\varepsilon} = \frac{\delta^l S}{\delta\phi^*_A}\bar{\varepsilon}. \tag{4.207}$$

Здесь $\bar{\varepsilon}$ – грассманов параметр. Действие $S[\phi,\ \phi^*]$ инвариантно относительно преобразований (4.207), если

$$\delta S = \int \frac{\delta^r S}{\delta\phi^A(x')}\delta\phi^A(x')d^4x' = \int \frac{\delta^r S}{\delta\phi^A(x')} \frac{\delta^l S}{\delta\phi^*_A(x')}\bar{\varepsilon} d^4x' =$$

$$= \frac{1}{2}(S,\ S)\bar{\varepsilon} = 0, \tag{4.208}$$

откуда следует, что инвариантное эффективное действие $S[\phi,\ \phi^*]$ есть решение уравнения

$$(S,\ S) = 0 \tag{4.209}$$

– так называемое мастер-уравнение (master equation). Очевидно, оно обеспечивает замкнутость алгебры относительно операции (4.203): для любой величины F из тождеств Якоби (которые справедливы для бинарной операции (4.203)) следует

$$\delta^2 F = ((F,\ S),\ S) \sim ((S,\ S),\ F) = 0. \tag{4.210}$$

Оказывается, что переменные ϕ^* можно представить как производные одной нечетной функции от переменных ϕ по этим переменным:

$$\phi^*_A = \frac{\delta^r \bar{\psi}}{\delta \phi^A}. \tag{4.211}$$

Уравнения (4.211) определяют некоторую поверхность Σ в расширенном конфигурационном пространстве $(\phi,\ \phi^*)$. При этом ограничение действия $S[\phi,\ \phi^*]$ на поверхность Σ дает правильные правила Фейнмана для рассматриваемой калибровочной теории (с учетом духового сектора). Функция $\bar{\psi}$, определяющая поверхность Σ, несет в то же время информацию о калибровке.

Для того, чтобы проиллюстрировать это утверждение, обратимся, как всегда, к теории Янга – Миллса. Поскольку алгебра преобразований замкнута, разложение (4.201) ограничивается членами, линейными по антиполям ϕ^*. Напомним БРСТ-преобразования переменных A^a_μ, η^a, $\bar{\eta}_a$, π_a:

$$\delta A^a_\mu = D_\mu \eta^a \bar{\varepsilon} \equiv R^a_{\mu b} \eta^b \bar{\varepsilon}; \tag{4.212}$$

$$\delta \eta^a = -\frac{1}{2} g f^a{}_{bc} \eta^b \eta^c \bar{\varepsilon}; \tag{4.213}$$

$$\delta \bar{\eta}_a = i \pi_a \bar{\varepsilon}; \tag{4.214}$$

$$\delta \pi_a = 0. \tag{4.215}$$

Тогда действие $S[\phi,\ \phi^*]$ примет вид:

$$S[\phi,\ \phi^*] = S[g] + \phi^*_A S^A[\phi] \ = S[A^a_\mu] + \int d^4x \left(A^{*\mu}_{\ a} R^a_{\mu b} \eta^b - \frac{1}{2} \eta^*_a g f^a{}_{bc} \eta^b \eta^c + i \bar{\eta}^{*a} \pi_a \right). \tag{4.216}$$

Очевидно, что преобразования переменных A^a_μ, η^a, $\bar{\eta}_a$, π_a могут быть представлены в виде (4.207), где S дается выражением (4.216).

Чтобы получить знакомое выражение для эффективного действия Фаддеева – Попова, выберем функцию $\bar{\psi}$ в виде

$$\bar{\psi} = \bar{\eta}_a f^a [A^b_\mu]. \tag{4.217}$$

Здесь $f^a[A^b_\mu]$ – функция, фиксирующая калибровку. Тогда

$$A^{*\mu}_{\ a} = \frac{\delta \bar{\psi}}{\delta A^a_\mu} = \bar{\eta}_b \frac{\delta f^b}{\delta A^a_\mu}; \tag{4.218}$$

$$\eta^*_a = \frac{\delta^r \bar{\psi}}{\delta \eta^a} = 0; \tag{4.219}$$

$$\bar{\eta}^{*a} = \frac{\delta^r \bar{\psi}}{\delta \bar{\eta}_a} = f^a[A^b_\mu]. \tag{4.220}$$

Учитывая, что оператор Фаддеева – Попова есть

$$\hat{M}^a_b = \frac{\delta f^a}{\delta A^c_\mu} R^c_{\mu b}, \tag{4.221}$$

получаем следующую формулу для эффективного действия как ограничение выражения (4.216) на поверхность Σ:

$$S[\phi,\, \phi^*]|_\Sigma = S[A^a_\mu] + \int d^4x \left(\bar{\eta}_a \frac{\delta f^a}{\delta A^c_\mu} R^c_{\mu b} \eta^b + i\pi_a f^a[A^b_\mu] \right) =$$

$$= S[A^a_\mu] + \int d^4x \left(\bar{\eta}_a \hat{M}^a_b \eta^b + i\pi_a f^a[A^b_\mu] \right). \tag{4.222}$$

Получили эффективное действие Фаддеева – Попова с духовым и фиксирующим калибровку членами.

В соответствии с общим построением теории БРСТ-преобразования калибровочных полей всегда нильпотентны. Для полей Янга – Миллса это было продемонстрировано ранее. Возможность сделать БРСТ-преобразования нильпотентными обусловлена тем, что в этом случае (в отличие от калибровочных преобразований) преобразованиям подвергаются не только калибровочные поля g^i, но и грассмановы поля η^a, заменяющие параметры калибровочных преобразований. Преобразования для грассмановых полей подбираются таким образом, чтобы алгебра БРСТ-преобразований стала нильпотентной (что одновременно означает замкнутость алгебры).

Продемонстрируем это на примере полей с замкнутой (но не нильпотентной) калибровочной алгеброй. Преобразований для g^i, η^a имеют вид:

$$\delta g^i = R^i_a[g]\eta^a \bar{\varepsilon}; \tag{4.223}$$

$$\delta \eta^a = -\frac{1}{2} C^a{}_{bc} \eta^b \eta^c \bar{\varepsilon}. \tag{4.224}$$

Тогда

$$\delta^2 g^i = \frac{\delta R^i_a}{\delta g^k} \delta g^k \eta^a \bar{\varepsilon} + R^i_a[g] \delta \eta^a \bar{\varepsilon}. \tag{4.225}$$

(Эти два члена должны компенсировать друг друга).

$$\delta^2 g^i = \frac{\delta R^i_a}{\delta g^k} R^k_b[g] \eta^b \bar{\xi} \eta^a \bar{\varepsilon} - \frac{1}{2} R^i_a[g] C^a{}_{bc} \eta^b \eta^c \bar{\xi} \bar{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta R^i_a}{\delta g^k} R^k_b[g] \eta^a \eta^b \bar{\xi} \bar{\varepsilon} - \frac{\delta R^i_a}{\delta g^k} R^k_b[g] \eta^b \eta^a \bar{\xi} \bar{\varepsilon} \right) - \frac{1}{2} R^i_c[g] C^c{}_{ab} \eta^a \eta^b \bar{\xi} \bar{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\delta R^i_a}{\delta g^k} R^k_b[g] - \frac{\delta R^i_b}{\delta g^k} R^k_a[g] - R^i_c[g] C^c{}_{ab}\right)\eta^a\eta^b\bar{\xi}\bar{\varepsilon} = 0. \qquad (4.226)$$

Выражение в скобках в (4.226) равно 0 в силу (4.194). Преобразования для переменных η^a также нильпотентны в силу тождеств Якоби для структурных констант $C^a{}_{bc}$, как было показано ранее.

Амплитуда перехода определяется через континуальный интеграл

$$\int \exp\left(iS[\phi,\ \phi^*]|_\Sigma\right)\prod_x\prod_A d\phi^{\mathrm{A}}(x) = \int \exp\left(iS\left[\phi,\ \frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\phi^A}\right]\right)\prod_x\prod_A d\phi^{\mathrm{A}}(x). \qquad (4.227)$$

Используя замкнутость алгебры преобразований, генерируемых эффективным действием $S[\phi,\ \phi^*]$, можно доказать независимость континуального интеграла (4.227) от выбора функции $\bar{\psi}$. Доказательство аналогично доказательству теоремы Фрадкина – Вилковыского (см. раздел 7).

5. Гравитация

Цель данных лекций состоит в том, чтобы, с одной стороны, указать на общие черты гравитационного поля и других калибровочных полей (электромагнитного поля, полей Янга – Миллса) и проиллюстрировать некоторые положения, излагавшиеся в предшествующих разделах курса "Метод континуального интеграла в квантовой теории поля" и, с другой стороны, указать на особенности гравитационного поля, порождающие трудности при его квантовании.

5.1. Гравитационное поле как калибровочное

В этом разделе мы рассмотрим группу калибровочных преобразований для гравитации. Канонический формализм и особенности квантования с помощью континуального интеграла рассматриваются в последующих разделах.

Определим бесконечно малые изменения компонент метрического тензора, используя понятие производной Ли, после чего продемонстрируем замкнутость алгебры калибровочных преобразований для гравитации.

Рассмотрим инфинитезимальные преобразования координат вида

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + s\eta^\mu(x). \tag{5.1}$$

Здесь s – инфинитезимальный параметр, η^μ – векторное поле. Преобразования (5.1) образуют локальную однопараметрическую группу. Эти преобразования влекут за собой преобразования метрического тензора:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') = g_{\lambda\rho}(x)\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} &= g_{\lambda\rho}(x)\left[\delta^\lambda_\mu - s\partial_\mu\eta^\lambda(x')\right]\left[\delta^\rho_\nu - s\partial_\nu\eta^\rho(x')\right] + O(s) = \\ &= g_{\mu\nu}(x) - s\left[g_{\mu\rho}\partial_\nu\eta^\rho + g_{\nu\lambda}\partial_\mu\eta^\lambda\right] + O(s) = \\ &= g_{\mu\nu}(x') - s\left[\eta^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu} + g_{\mu\lambda}\partial_\nu\eta^\lambda + g_{\nu\lambda}\partial_\mu\eta^\lambda\right] + O(s). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Производной Ли тензора $g_{\mu\nu}$ вдоль векторного поля η^μ называется выражение

$$L_\eta g_{\mu\nu}(x) = \left[\frac{d}{ds}g'_{\mu\nu}(x')\right]\Big|_{s=0}. \tag{5.3}$$

Беря производную по параметру s от (5.2) и положив $s = 0$ (заметим, что при этом $x'^\mu = x^\mu$), мы немедленно получим изменение компонент метрического тензора при преобразованиях из группы диффеоморфизмов:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}; \tag{5.4}$$

$$\delta g_{\mu\nu} = L_\eta g_{\mu\nu} = -\eta^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\mu\lambda}\partial_\nu \eta^\lambda - g_{\nu\lambda}\partial_\mu \eta^\lambda. \tag{5.5}$$

Определение производной Ли можно обобщить на случай произвольного тензора:

$$L_\eta T^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n}(x) = \left[\frac{d}{ds} T'^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n}(x')\right]\Bigg|_{s=0}. \tag{5.6}$$

Очевидно, производная Ли определяет изменение компонент тензора при инфинитезимальных преобразованиях координат (вдоль направления, определяемого векторным полем η^μ).

Замечание: конечные преобразования однопараметрической группы $x'^\mu = x'^\mu(s,\ x^\nu)$ являются решениями уравнений

$$\frac{dx'^\mu}{ds} = \eta^\mu(x'), \tag{5.7}$$

с начальными условиями $x'^\mu|_{s=0} = x^\mu$, т. е. определяют интегральную кривую векторного поля η^μ с заданными начальными условиями.

Найдем, например, производную Ли векторного поля:

$$\xi'^\mu(x') = \xi^\lambda(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = \xi^\lambda(x)\left[\delta^\mu_\lambda + s\partial_\lambda \eta^\mu(x)\right] + O(s) = \xi^\mu(x) + s\xi^\lambda(x)\partial_\lambda\eta^\mu(x) + O(s) =$$

$$= \xi^\mu(x') + s\left[\xi^\lambda\partial_\lambda\eta^\mu - \eta^\lambda\partial_\lambda\xi^\mu\right] + O(s); \tag{5.8}$$

$$L_\eta \xi^\mu = \xi^\lambda\partial_\lambda\eta^\mu - \eta^\lambda\partial_\lambda\xi^\mu. \tag{5.9}$$

Выкладкой, аналогичной (5.2), для компонент обратного метрического тензора получаем:

$$g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}; \tag{5.10}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = L_\eta g^{\mu\nu} = -\partial_\rho g^{\mu\nu}\eta^\rho + g^{\nu\lambda}\partial_\lambda\eta^\mu + g^{\mu\lambda}\partial_\lambda\eta^\nu. \tag{5.11}$$

Для того, чтобы проверить замкнутость преобразований (5.4), (5.5), необходимо вычислить коммутатор $[L_\xi,\ L_\eta]g_{\mu\nu}$. Согласно (5.5), производная Ли от ковариантного тензора есть снова ковариантный тензор. Поэтому

$$L_\xi L_\eta g_{\mu\nu} = \xi^\rho\partial_\rho\left(\eta^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu} + g_{\mu\lambda}\partial_\nu\eta^\lambda + g_{\nu\lambda}\partial_\mu\eta^\lambda\right) + \left(\eta^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\rho} + g_{\mu\lambda}\partial_\rho\eta^\lambda + g_{\rho\lambda}\partial_\mu\eta^\lambda\right)\partial_\nu\xi^\rho +$$

$$+ \left(\eta^\lambda\partial_\lambda g_{\rho\nu} + g_{\rho\lambda}\partial_\nu\eta^\lambda + g_{\nu\lambda}\partial_\rho\eta^\lambda\right)\partial_\mu\xi^\rho = \xi^\rho\partial_\rho\eta^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \xi^\rho\eta^\lambda\partial_\rho\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \xi^\rho\partial_\rho g_{\mu\lambda}\partial_\nu\eta^\lambda +$$

$$+\xi^\rho g_{\mu\lambda}\partial_\rho\partial_\nu\eta^\lambda + \xi^\rho\partial_\rho g_{\nu\lambda}\partial_\mu\eta^\lambda + \xi^\rho g_{\nu\lambda}\partial_\rho\partial_\mu\eta^\lambda +$$

$$+\eta^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\rho}\partial_\nu\xi^\rho + g_{\mu\lambda}\partial_\rho\eta^\lambda\partial_\nu\xi^\rho + g_{\rho\lambda}\partial_\mu\eta^\lambda\partial_\nu\xi^\rho +$$

$$+\eta^\lambda\partial_\lambda g_{\rho\nu}\partial_\mu\xi^\rho + g_{\rho\lambda}\partial_\nu\eta^\lambda\partial_\mu\xi^\rho + g_{\nu\lambda}\partial_\rho\eta^\lambda\partial_\mu\xi^\rho. \tag{5.12}$$

$$[L_\xi,\ L_\eta]g_{\mu\nu} = -\left(\eta^\rho\partial_\rho\xi^\lambda - \xi^\rho\partial_\rho\eta^\lambda\right)\partial_\lambda g_{\mu\nu} -$$

$$-g_{\mu\lambda}\left(\partial_\nu\eta^\rho\partial_\rho\xi^\lambda + \eta^\rho\partial_\rho\partial_\nu\xi^\lambda - \partial_\nu\xi^\rho\partial_\rho\eta^\lambda - \xi^\rho\partial_\rho\partial_\nu\eta^\lambda\right) -$$

$$-g_{\nu\lambda}\left(\partial_\mu\eta^\rho\partial_\rho\xi^\lambda + \eta^\rho\partial_\rho\partial_\mu\xi^\lambda - \partial_\mu\xi^\rho\partial_\rho\eta^\lambda - \xi^\rho\partial_\rho\partial_\mu\eta^\lambda\right) =$$

$$= -\left(\eta^\rho\partial_\rho\xi^\lambda - \xi^\rho\partial_\rho\eta^\lambda\right)\partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\mu\lambda}\partial_\nu\left(\eta^\rho\partial_\rho\xi^\lambda - \xi^\rho\partial_\rho\eta^\lambda\right) - g_{\nu\lambda}\partial_\mu\left(\eta^\rho\partial_\rho\xi^\lambda - \xi^\rho\partial_\rho\eta^\lambda\right) =$$

$$= -L_\xi\eta^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\mu\lambda}\partial_\nu L_\xi\eta^\lambda - g_{\nu\lambda}\partial_\mu L_\xi\eta^\lambda = L_{L_\xi}g_{\mu\nu}. \tag{5.13}$$

Здесь для метрического тензора мы продемонстрировали общее свойство производных Ли, согласно которому

$$[L_\xi,\ L_\eta] = L_{L_\xi}. \tag{5.14}$$

Итак, коммутатор двух калибровочных преобразований есть новое калибровочное преобразование с параметром

$$L_\xi\eta^\mu = \eta^\lambda\partial_\lambda\xi^\mu - \xi^\lambda\partial_\lambda\eta^\mu. \tag{5.15}$$

Введя структурные константы

$$C^\mu{}_{\nu\lambda}(x,\ x',\ x'') = \delta^\mu_\lambda\delta(x,\ x')\partial_\nu\delta(x,\ x'') - \delta^\mu_\nu\delta(x,\ x'')\partial_\lambda\delta(x,\ x'), \tag{5.16}$$

(5.15) можно представить в виде

$$\iint d^4x'd^4x''C^\mu{}_{\nu\lambda}(x,\ x',\ x'')\xi^\nu(x')\eta^\lambda(x'') = \iint d^4x'd^4x''\left(\delta^\mu_\lambda\delta(x,\ x')\partial_\nu\delta(x,\ x'')-\right.$$

$$\left.-\delta^\mu_\nu\delta(x,\ x'')\partial_\lambda\delta(x,\ x')\right)\xi^\nu(x')\eta^\lambda(x'') = \eta^\lambda\partial_\lambda\xi^\mu - \xi^\nu\partial_\nu\eta^\mu. \tag{5.17}$$

В теории гравитации, таким образом, выполняются соотношения

$$\int d^4y\left(\frac{\delta R_{\mu\nu|\lambda}(x,\ x')}{\delta g_{\sigma\tau}(y)}R_{\sigma\tau|\rho}(y,\ x'') - \frac{\delta R_{\mu\nu|\rho}(x,\ x')}{\delta g_{\sigma\tau}(y)}R_{\sigma\tau|\lambda}(y,\ x'')\right) =$$

$$= \int d^4yR_{\mu\nu|\sigma}(x,\ y)C^\sigma{}_{\lambda\rho}(y,\ x',\ x''), \tag{5.18}$$

где

$$R_{\mu\nu|\lambda}(x,\ x') = -\delta(x,\ x')\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) + g_{\mu\lambda}(x)\partial_\nu\delta(x,\ x') + g_{\nu\lambda}(x)\partial_\mu\delta(x,\ x'); \tag{5.19}$$

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = \int d^4x'R_{\mu\nu|\lambda}(x,\ x')\eta^\lambda(x') = -\eta^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\mu\lambda}\partial_\nu\eta^\lambda - g_{\nu\lambda}\partial_\mu\eta^\lambda. \tag{5.20}$$

Инвариантность действия относительно локальной группы преобразований означает существование независимых тождеств между лагранжевыми уравнениями движения (тождеств Нетер).

Рассмотрим чисто гравитационное действие

$$S = \int\sqrt{-g}Rd^4x. \tag{5.21}$$

Тогда

$$S[g'_{\mu\nu}] = S[g_{\mu\nu}] + \int\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}d^4x; \tag{5.22}$$

$$\int\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}d^4x = 0. \tag{5.23}$$

$$\int \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \left(-g_{\mu\lambda}\partial_\nu \eta^\lambda - g_{\nu\lambda}\partial_\mu \eta^\lambda - \eta^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) d^4x =$$

$$= \int \left[\partial_\mu \left(g_{\nu\lambda}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\right) + \partial_\nu \left(g_{\mu\lambda}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\right) - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\right] \eta^\lambda d^4x =$$

$$= \int \left[2g_{\nu\lambda}\partial_\mu \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\right) + 2\partial_\mu g_{\nu\lambda}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\right] \eta^\lambda d^4x = 0. \qquad (5.24)$$

В силу произвольности параметров η^λ выражение в скобках обращается в 0. Поэтому

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\rho}}\right) + \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \partial_\mu \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\rho}}\right) + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} =$$

$$= \partial_\mu \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\rho}}\right) + \sqrt{-g}\partial_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\right) \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\rho}} + \Gamma^\mu_{\mu\nu}\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\rho}} +$$

$$+ \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g} D_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\rho}}\right) = 0 \qquad (5.25)$$

Таким образом мы получаем, что

$$D_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\right) = 0, \qquad (5.26)$$

но

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R. \qquad (5.27)$$

В общей теории относительности тождества

$$D_\nu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) = 0 \qquad (5.28)$$

выводятся из свойств тензора кривизны (следствие тождеств Бианки). Очевидно, что они содержатся в уравнениях Эйнштейна для свободного гравитационного поля

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0. \qquad (5.29)$$

Существование тождеств означает, что не все уравнения Эйнштейна независимы между собой. Мы имеем 10 уравнений Эйнштейна для 10 компонент метрического тензора, но наличие четырех тождеств понижает число независимых уравнений до 6, так что для определения всех компонент метрического тензора необходимо ввести 4 дополнительных условия – т. е. возникает необходимость в введении калибровки.

Для нас важно, что такая ситуация является общей для всех калибровочных теорий: существование тождеств между лагранжевыми уравнениями является содержанием второй теоремы Нетер для теорий, инвариантных относительно бесконечных групп преобразований (теорий с локальной калибровочной симметрией). Фактически, мы применили вторую теорему Нетер к гравитационному действию.

Гораздо проще вывести аналогичные тождества для случая электромагнитного поля:

$$\int \frac{\delta S}{\delta A_\mu}\delta A_\mu d^4x = \int \frac{\delta S}{\delta A_\mu}\partial_\mu \eta d^4x = -\int \partial_\mu\left(\frac{\delta S}{\delta A_\mu}\right)\eta d^4x = 0; \tag{5.30}$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\delta S}{\delta A_\mu}\right) = \partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \tag{5.31}$$

(Последнее тождество очевидно в силу симметрии тензора $F^{\mu\nu}$.)

Наконец, в случае полей Янга – Миллса имеем:

$$D^b_{\mu a}\left(\frac{\delta S}{\delta A^b_\mu}\right) = D^b_{\mu a}D^c_{\nu b}F^{\mu\nu}_c = 0. \tag{5.32}$$

Таким образом выявляются общие черты теории гравитации и калибровочных теорий, инвариантных относительно унитарных групп $SU(N)$. Эти общие черты послужили основой для геометрической интерпретации калибровочных теорий.

Из проведенного рассмотрения ясно, что число тождеств равно числу бесконечно малых параметров преобразований. Справедливо следующее утверждение: если теория калибровочная, то она является теорией со связями первого рода в гамильтоновом формализме, причем число первичных связей первого рода опять же совпадает с числом независимых параметров. Верно и обратное утверждение: теория со связями первого рода в гамильтоновом формализме является калибровочной с числом независимых параметров, равным числу первичных связей первого рода.

Среди лагранжевых уравнений, однако, также присутствуют связи: (00) и (0α) уравнения Эйнштейна (получаемые варьированием гравитационного действия по g^{00} и $g^{0\alpha}$) являются связями в лагранжевом формализме: они не содержат производных второго порядка по времени от компонент метрического тензора.

Выше мы показали, что алгебра калибровочных преобразований для гравитации является замкнутой. С точки зрения метода Баталина – Вилковыского в лагранжевом формализме эффективное действие квантовой теории должно приводится к действию Фаддеева – Попова

$$S_{(eff)} = \int d^4x\left(\sqrt{-g}R + \pi_\mu f^\mu[g_{\nu\lambda}] + \bar\eta_\mu \hat M^\mu_\nu \eta^\nu\right). \tag{5.33}$$

Приведем примеры наиболее часто используемых локальных калибровок.

1. Синхронная калибровка.

$$f^\mu[g^{\nu\lambda}] = \sqrt{-g}g^{\mu 0} - \delta^\mu_0\sqrt{\gamma}. \tag{5.34}$$

$\gamma = \det\|\gamma_{ij}\|$ – определитель пространственного метрического тензора.

Определим оператор Фаддеева – Попова $\hat M^\mu_\nu$:

$$\hat M^\mu_\nu \eta^\nu = \frac{\delta f^\mu}{\delta \eta^\nu}\eta^\nu = \frac{\delta f^\mu}{\delta g^{\lambda\rho}}\frac{\delta g^{\lambda\rho}}{\delta\eta^\nu}\eta^\nu. \tag{5.35}$$

$$\frac{\delta f^\mu}{\delta g^{\lambda\rho}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\lambda\rho}g^{\mu 0} + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\delta^\mu_\lambda\delta^0_\rho + \delta^0_\lambda\delta^\mu_\rho\right). \quad (5.36)$$

$$\frac{\delta f^\mu}{\delta g^{\lambda\rho}}\delta g^{\lambda\rho} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(-g_{\lambda\rho}g^{\mu 0} + \delta^\mu_\lambda\delta^0_\rho + \delta^0_\lambda\delta^\mu_\rho\right)\times$$

$$\times\left(-\partial_\nu g^{\lambda\rho}\eta^\nu + g^{\nu\lambda}\partial_\nu\eta^\rho + g^{\rho\nu}\partial_\nu\eta^\lambda\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(g_{\lambda\rho}\partial_\nu g^{\lambda\rho}g^{\mu 0}\eta^\nu - 2g^{\mu 0}\partial_\nu\eta^\nu - 2\partial_\nu g^{\mu 0}\eta^\nu + 2g^{\mu\nu}\partial_\nu\eta^0 + 2g^{0\nu}\partial_\nu\eta^\mu\right) =$$

$$= -\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu 0}\eta^\nu\right) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\eta^0 + \sqrt{-g}g^{0\nu}\partial_\nu\eta^\mu. \quad (5.37)$$

Таким образом, оператор Фаддеева – Попова

$$\hat{M}^\mu_\nu = -\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu 0}\right) - \sqrt{-g}g^{\mu 0}\partial_\nu + \sqrt{-g}g^{\mu\lambda}\partial_\lambda\delta^0_\nu + \sqrt{-g}g^{0\lambda}\partial_\lambda\delta^\mu_\nu. \quad (5.38)$$

2. Калибровка де Дондера – Фока

$$\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) = l^\mu(x), \quad (5.39)$$

$l^\mu(x)$ – заданное векторное поле (обобщение калибровки Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$ в электродинамике). Аналогично можно показать, что для этой калибровки

$$\hat{M}^\mu_\nu\eta^\nu = -\partial_\lambda\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}\eta^\nu\right) + \partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\rho}\partial_\rho\eta^\nu\right) + \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\lambda\rho}\partial_\rho\eta^\mu\right) =$$

$$= -\partial_\nu\left[\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}\right)\eta^\nu\right] - \partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}\partial_\lambda\eta^\nu\right) +$$

$$+\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\rho}\partial_\rho\eta^\nu\right) + \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\lambda\rho}\partial_\rho\eta^\mu\right) =$$

$$= -\partial_\nu\left[\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}\right)\eta^\nu\right] + \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\lambda\rho}\partial_\rho\eta^\mu\right). \quad (5.40)$$

$$\hat{M}^\mu_\nu = -\partial_\nu\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}\right) - \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}\right)\partial_\nu + \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\lambda\rho}\right)\partial_\rho\delta^\mu_\nu + \sqrt{-g}g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\partial_\rho\delta^\mu_\nu. \quad (5.41)$$

Теперь мы обратимся к гамильтонову формализму, который, вообще говоря, в случае гравитации не эквивалентен лагранжеву. Основная причина этого заключается в том, что группа калибровочных преобразований метрики и группа преобразований, генерируемых гравитационными связями, не совпадают.

5.2. Гамильтонов формализм. Геометродинамика Уилера – Де Витта

Для того, чтобы определить связи в гамильтоновом формализме, удобно обратиться к следующему представлению метрического тензора (которое, кстати, часто используется при исследовании конкретных космологических моделей):

$$g_{00} = -N^2 + N_iN^i;\ g_{0i} = N_i;\ g_{ij} = \gamma_{ij}. \quad (5.42)$$

Гравитационный лагранжиан можно привести в следующему виду:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R = N\sqrt{\gamma}\left(K_{ij}K^{ij} - K^2 + R^{(3)}\right) -$$
$$-2\partial_0\left(\sqrt{\gamma}K\right) + 2\partial_i\left(\sqrt{\gamma}KN^i - \sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\partial_j N\right), \tag{5.43}$$

Здесь

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(D_i N_j + D_j N_i - \partial_0\gamma_{ij}\right); \tag{5.44}$$

$$K^{ij} = \gamma^{ik}\gamma^{jl}K_{kl};\; K = \gamma^{ij}K_{ij}; \tag{5.45}$$

ковариантные производные определяются по метрике γ_{ij}:

$$D_i N_j = \partial_i N_j - \Gamma^{(3)k}_{\;ij} N_k; \tag{5.46}$$

$$\Gamma^{(3)k}_{\;ij} = \frac{1}{2}\gamma^{kl}\left(\partial_i\gamma_{jl} + \partial_j\gamma_{il} - \partial_l\gamma_{ij}\right); \tag{5.47}$$

K_{ij} – вторая фундаментальная форма, тензор внешней кривизны 3-поверхности постоянного времени; описывает кривизну 3-поверхности, погруженной (embedded) в 4-мерное пространство-время; $R^{(3)}$ – тензор внутренней кривизны 3-поверхности, скалярная кривизна, построенная по метрике γ_{ij}.

Из формул (5.43) – (5.45) сразу видно, что лагранжиан не содержит производных по времени от N и N_i, т. е. мы имеем первичные связи

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{N}} = 0;\; \pi^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{N}_i} = 0. \tag{5.48}$$

Импульсы, сопряженные γ_{ij}, отличны от 0:

$$p^{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\gamma}_{ij}} = -\sqrt{\gamma}\left(K^{ij} - \gamma^{ij}K\right). \tag{5.49}$$

Можно показать, что гамильтониан есть

$$\mathcal{H} = p^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L} = NT + N_i T^i, \tag{5.50}$$

где

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\left(\gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk} - \gamma_{ij}\gamma_{kl}\right)p^{ij}p^{kl} - \sqrt{\gamma}R^{(3)} = \sqrt{\gamma}\left(K_{ij}K^{ij} - K^2 - R^{(3)}\right); \tag{5.51}$$

$$T^i = -2D_j p^{ij} = -2\left(\partial_j p^{ij} + \Gamma^{(3)i}_{\;kj}p^{jk} + \Gamma^{(3)j}_{\;kj}p^{ik}\right) =$$
$$= -2\partial_j p^{ij} - \gamma^{il}\left(2\partial_k\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{jk}\right)p^{jk}. \tag{5.52}$$

Гамильтониан представляет собой линейную комбинацию вторичных связей, а N и N_i играют роль лагранжевых множителей. Действительно, из условия сохранения связей во времени

$$\dot{\pi} = \{\pi,\, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial N} = -T = 0; \tag{5.53}$$

$$\dot{\pi}^i = \{\pi^i,\ \mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N_i} = -T^i = 0 \qquad (5.54)$$

вытекает, что T и T^i – вторичные связи в гамильтоновом формализме. (Ситуация опять-таки аналогична тому, что мы имели в электромагнитной теории: $\pi = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0$ – первичная связь, и из условия сохранения этой связи во времени вытекает, что $\dot{\pi} = \{\pi,\ \mathcal{H}_{(1)}\} = \partial_i p^i = 0$ – см. формулу (3.32) главы 3.) Связь (5.51) называется гамильтоновой связью. Калибровочные степени свободы N, N_i часто называют функциями хода и сдвига.

Связь

$$\begin{aligned} T_k = \gamma_{ki} T^i = -2\gamma_{ki}\partial_j p^{ij} - \left(2\partial_j \gamma_{ik} - \partial_k \gamma_{ij}\right) p^{ij} = \\ = -\gamma_{ki}\partial_j p^{ij} - \gamma_{kj}\partial_i p^{ij} - \left(\partial_j\gamma_{ik} + \partial_i \gamma_{jk} - \partial_k \gamma_{ij}\right) p^{ij}. \end{aligned} \qquad (5.55)$$

генерирует преобразования 3-метрики при трехмерных диффеоморфизмах. Действительно,

$$\begin{aligned} -\int \{\gamma_{ij}(\vec{x}),\ T_k(\vec{x}')\}\xi^k(\vec{x}')d^3x' = -\int \frac{\delta T_k(\vec{x}')}{\delta p^{ij}(\vec{x})}\xi^k(\vec{x}')d^3x' = \\ = \int \left[\gamma_{ki}\partial_j \delta(\vec{x},\ \vec{x}') + \gamma_{kj}\partial_i\delta(\vec{x},\ \vec{x}') + \left(\partial_j\gamma_{ik} + \partial_i\gamma_{jk} - \partial_k\gamma_{ij}\right)\delta(\vec{x},\ \vec{x}')\right]\xi^k(\vec{x}')d^3x' = \\ = -\partial_j\left(\gamma_{ik}\xi^k\right) - \partial_i\left(\gamma_{jk}\xi^k\right) + \partial_j\gamma_{ik}\xi^k + \partial_i\gamma_{jk}\xi^k - \partial_k\gamma_{ij}\xi^k = \\ = -\gamma_{ik}\partial_j\xi^k - \gamma_{jk}\partial_i\xi^k - \partial_k\gamma_{ij}\xi^k. \end{aligned} \qquad (5.56)$$

Связь (5.55), таким образом, подобна вторичным связям теории Янга – Миллса и электродинамики, которые генерируют преобразования пространственных компонент поля A_μ^a, совпадающие с калибровочными преобразованиями этих компонент. Гамильтонова связь T, однако, не имеет аналога в других калибровочных теориях; она имеет нестандартную (квадратичную) зависимость от импульсов p^{ij}. Все вторичные связи, очевидно, не зависят от функций хода и сдвига N, N_i и сопряженных им импульсов, поэтому не могут генерировать преобразования для этих величин.

Квантовая теория замкнутой вселенной (квантовая геометродинамика) была впервые предложена в работе Де Витта 1967 года. Де Витт воспроизвел дираковскую схему квантования для гравитации, опираясь на некоторые идеи Уилера о волновой функции (векторе состояния) Вселенной.

В соответствие с дираковским подходом, связи становятся условиями на вектор состояния:

$$\hat{\pi}\,|\,\Psi>=0;\ \hat{\pi}^i\,|\,\Psi>=0; \qquad (5.57)$$

$$\hat{T}\,|\,\Psi>=0;\ \hat{T}^i\,|\,\Psi>=0. \qquad (5.58)$$

Поскольку гамильтониан сводится к линейной комбинации связей, из (5.58) вытекает, что рассматриваемая теория, основанная на дираковском формализме, дает лишь статическую картину мира:

$$H = \int \mathcal{H} d^3x;\ \hat{H}\,|\,\Psi> = \int d^3x\left(N\hat{T} + N_i\hat{T}^i\right)\,|\,\Psi>=0. \qquad (5.59)$$

Проведенное рассмотрение, строго говоря, справедливо только для замкнутой вселенной. В открытой вселенной интеграл по 4-пространству от полных производных, будучи превращен в интеграл по замкнутой 3-поверхности, не равен нулю из-за особых свойств гравитационного поля: оно не исчезает вне конечного объема, если только пространство-время не плоское. В этом случае гамильтониан

$$H_\infty = H + E_\infty, \tag{5.60}$$

где E_∞ – величина этого поверхностного интеграла; она не является константой, но зависит от состояния гравитационного поля, так что исключение величины E_∞ из лагранжиана не соответствует просто переопределению нуля энергии.

В замкнутой вселенной поверхностный интеграл E_∞ исчезает. Вывод о статической картине мира Де Витт предлагал интерпретировать следующим образом: физический смысл имеет лишь внутренняя динамика мира, его геометрии, описываемой трехмерной метрикой. Четырехмерное же описание мира, в частности, его эволюции во времени, является несущественным.

Вернемся к уравнениям (5.57), (5.58). В квантовой теории обобщенные импульсы становятся дифференциальными операторами:

$$\hat{\pi} = -i\frac{\delta}{\delta N};\ \hat{\pi}^i = -i\frac{\delta}{\delta N_i};\ \hat{p}^{ij} = -i\frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}}. \tag{5.61}$$

В таком случае первичные связи (5.57) означают, что вектор состояния, или волновая функция Вселенной, зависит только от компонент 3-метрики γ_{ij} (не зависит от функций хода и сдвига $N,\ N_i$). Вторая из связей (5.58) интерпретируется следующим образом: она представляет собой необходимое и достаточное условие того, что волновая функция Вселенной инвариантна относительно координатных преобразований 3-метрики,

$$2iD_j\left(\frac{\delta}{\delta\gamma_{ij}}\,|\,\Psi>\right) = 0. \tag{5.62}$$

Итак, волновая функция Вселенной в этом подходе должна зависеть только от геометрии 3-пространства, $\mathcal{G}^{(3)}$. Чтобы выразить эту идею, Уилер даже записывал уравнение $\hat{T}\,|\,\Psi> = 0$, где $\hat{T}$ – квантовый аналог связи (5.51) в символической форме:

$$-\frac{\nabla^2\Psi}{(\delta\mathcal{G}^{(3)})} + R^{(3)}\Psi = 0. \tag{5.63}$$

Уравнение (5.63) опять-таки справедливо в случае замкнутой вселенной: в открытой вселенной волновая функция должна зависеть не только от 3-геометрии, но и от выбора системы координат на бесконечности. В случае же замкнутой вселенной волновая функция определена на многообразии всех возможных 3-геометрий, называемом суперпространством (по терминологии Уилера); 3-геометрии представляют собой элементы ("точки") этого многообразия. Де Витт указывал, что один из возможных способов выразить идею о зависимости волновой функции замкнутой вселенной только от геометрии пространства – это считать, что волновая функция зависит от бесконечного дискретного множества геометрических инвариантов, таких как

$$\int \sqrt{\gamma} d^3x; \int \sqrt{\gamma} R^{(3)} d^3x; \int \sqrt{\gamma} \left(R^{(3)}\right)^2 d^3x \tag{5.64}$$

и т. д. Однако реализовать эту идею математически не представляется возможным, поэтому волновая функция Вселенной зависит не от абстрактного понятия 3-геометрии, а от конкретной трехмерной метрики. Квантовый аналог связи (5.51) после замены 3-метрики и сопряженных обобщенных импульсов операторами принимает вид

$$\left(G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}} \frac{\delta}{\delta \gamma_{kl}} + \sqrt{\gamma} R^{(3)}\right) \Psi = 0, \tag{5.65}$$

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left(\gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk} - \gamma_{ij}\gamma_{kl}\right). \tag{5.66}$$

Это знаменитое уравнение Уилера – Де Витта. Первый член в (5.65) представляет собой аналог оператора Лапласа, построенного по "суперметрике" в конфигурационном пространстве всех 3-метрик γ_{ij}. Здесь заключается одна из трудностей теории Уилера – Де Витта, поскольку эта "суперметрика" оказывается зависящей от функции хода N, точнее говоря, с точностью до постоянного множителя она равна $\frac{1}{N} G^{ijkl}$, где G^{ijkl} – величина, обратная G_{ijkl} (5.66) ("суперметрика" в конфигурационном пространстве обсуждается в работе Хокинга и Пейджа 1986 года). Для того, чтобы выписать уравнение Уилера – Де Витта в явном виде, необходимо зафиксировать функцию хода N. Уравнение Уилера – Де Витта параметризационно неинвариантно: если мы будем считать N переменной, независимой от γ_{ij}, мы получим один вид уравнения Уилера – Де Витта; если же мы перейдем к другой переменной $\tilde{N}$,

$$N = \tilde{N} v(\gamma_{ij}), \tag{5.67}$$

и будем считать $\tilde{N}$ независимой, то мы получим уравнение Уилера – Де Витта в другом виде, не сводящимся к первому, поскольку изменится метрика конфигурационного пространства. Хокинг и Пейдж предложили зафиксировать вид уравнения Уилера – Де Витта, считая функцию хода N независимой от γ_{ij} (т. е. замены типа (5.67) недопустимы). Подобным образом Де Витт использовал конкретный выбор переменных N, N_i:

$$N = 1; \ N_i = 0, \tag{5.68}$$

поскольку подразумевалось, что теория калибровочно-инвариантна, так что конкретный выбор переменных N, N_i не существенен.

Заметим, однако, что параметризационная неинвариантность уравнения Уилера – Де Витта есть плохо скрытая калибровочная неинвариантность. Действительно, переход к другим калибровочным переменным формально эквивалентен наложению нового калибровочного условия, и наоборот. Последнее отражает тот очевидный факт, что выбор калибровочных переменных и выбор калибровочных условий имеет единую интерпретацию: они вместе определяют уравнения для $g_{0\mu}$-компонент метрики, которые, согласно Ландау и Лифшицу, фиксируют систему отсчета:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Параметризация} & + & \text{Калибровочные условия} & \Rightarrow & \text{Уравнения для } g_{0\mu} \\ g_{0\mu}=v_{\mu}\left(\tilde{N}_{\nu},\gamma_{ij}\right) & & \tilde{N}_{\nu}=f_{\nu}\left(\gamma_{ij}\right) & & g_{0\mu}=v_{\mu}\left(f_{\nu}\left(\gamma_{ij}\right),\gamma_{ij}\right) \end{array} \tag{5.69}$$

Даже если мы будем считать калибровочные переменные $\tilde{N}_{\nu}$ независимыми от γ_{ij}, различные параметризации будут соответствовать различным системам отсчета. В этом смысле параметризация (5.42) лишь одна из возможных параметризаций, которая, в совокупности с условиями (5.68), фиксирует синхронную систему отсчета.

Другая трудность теории Уилера – Де Витта связана с гиперболическим характером уравнения Уилера – Де Витта (так что оно напоминает уравнение Клейна – Гордона), что затрудняет вероятностную интерпретацию волновой функции Вселенной. Были предприняты попытки интерпретации решений уравнения Уилера – Де Витта в духе так называемого "третичного квантования", когда волновая функция рассматривается как оператор, выражающийся через операторы рождения и уничтожения вселенных (поля материи уже "вторично" квантованы, поэтому квантование волновой функции получило название "третичного"). Однако этот подход также натолкнулся на трудности, связанные с отсутствием причинной структуры суперпространства метрик, и на сегодняшний день не привел к каким-либо существенным результатам.

5.3. Метод Баталина – Фрадкина – Вилковыского в приложении к гравитации

Обратимся теперь к рассмотрению метода БФВ в расширенном фазовом пространстве для гравитации. Прежде всего нам понадобятся структурные функции, которые входят в соотношения

$$\{T_{\mu}(\vec{x}),\ T_{\nu}(\vec{x}')\}=\int d^3y C^{\lambda}{}_{\mu\nu}(\vec{x},\ \vec{x}',\ \vec{y})T_{\lambda}(\vec{y}), \tag{5.70}$$

$$T_{\mu}\equiv(T,\ T_i). \tag{5.71}$$

Ясно, что остальные структурные функции, которые входят в соотношения, подобные (5.70), для первичных связей, а также для первичных и вторичных связей, равны нулю.

Выпишем без вывода выражения для структурных функций:

$$C^{k}{}_{ij}(\vec{x},\ \vec{x}',\ \vec{x}'')=\delta^k_j\partial''_i\delta(\vec{x}',\ \vec{x}'')\delta(\vec{x},\ \vec{x}'')-$$

$$-\delta^k_i\partial''_j\delta(\vec{x},\ \vec{x}'')\delta(\vec{x}',\ \vec{x}''); \tag{5.72}$$

$$C^i{}_{00}(\vec{x},\ \vec{x}',\ \vec{x}'') = \gamma^{ij}(\vec{x}'')\left[2\partial_j\delta(\vec{x},\ \vec{x}')\delta(\vec{x},\ \vec{x}'') - \delta(\vec{x},\ \vec{x}')\partial''_j\delta(\vec{x},\ \vec{x}'')\right] =$$
$$= \gamma^{ij}(\vec{x}'')\partial_j\delta(\vec{x},\ \vec{x}')\left[\delta(\vec{x},\ \vec{x}'') + \delta(\vec{x}',\ \vec{x}'')\right]; \tag{5.73}$$
$$C^0{}_{i0}(\vec{x},\ \vec{x}',\ \vec{x}'') = \partial_i\delta(\vec{x},\ \vec{x}')\delta(\vec{x},\ \vec{x}''); \tag{5.74}$$
$$C^0{}_{0i}(\vec{x},\ \vec{x}',\ \vec{x}'') = -\partial'_i\delta(\vec{x},\ \vec{x}')\delta(\vec{x}',\ \vec{x}''). \tag{5.75}$$

Здесь $\partial'_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x'^i}$ и т. д. Остальные структурные функции первого порядка равны нулю.

Можно показать, что все структурные функции второго (а, следовательно, и всех высших порядков) равны нулю. Поэтому по принятой классификации гравитация является теорией первого ранга, как и теория полей Янга – Миллса. Однако некоторые структурные функции, $C^i{}_{00}$, содержат явную зависимость от компонент трехмерной метрики γ_{ij}, поэтому алгебра преобразований, генерируемых связями, строго говоря, является открытой. Посмотрим, к каким следствиям это приводит.

Генератор БРСТ-преобразований имеет вид:

$$\Omega = \int d^3x\left(c^\alpha U^{(0)}{}_\alpha + c^\beta c^\gamma U^{(1)}{}_{\gamma\beta}{}^\alpha\bar{\rho}_\alpha\right) = \int d^3x\left(\eta^\mu T_\mu - i\mathcal{P}^\mu\pi_\mu + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{P}}_\mu C^\mu{}_{\nu\lambda}\eta^\nu\eta^\lambda\right), \tag{5.76}$$
$$\pi_\mu \equiv (\pi,\ \pi_i);\ N_\mu \equiv (N,\ N_i). \tag{5.77}$$

$\{c^\alpha,\ \bar{\rho}_\alpha\}$ – духи и сопряженные импульсы БФВ; $\{\bar{\eta}_\mu,\ \eta^\mu,\ \mathcal{P}^\mu,\ \bar{\mathcal{P}}_\mu\}$ – духи Фаддеева – Попова. Как мы помним, в подходе БФВ гамильтониан дается скобкой Пуассона в расширенном фазовом пространстве функции $\bar{\psi}$, фиксирующей калибровку, с БРСТ-генератором. Выберем $\bar{\psi}$ в виде

$$\bar{\psi} = \int d^3x\bar{\rho}_\alpha\chi^\alpha = \int d^3x\left(i\bar{\eta}_\mu\chi^\mu + \bar{\mathcal{P}}_\mu N^\mu\right); \tag{5.78}$$
$$\chi^\alpha \equiv (\chi^\mu,\ N^\mu). \tag{5.79}$$

Мы видим, что помимо членов, аналогичные которым присутствуют в теории Янга – Миллса, скобка Пуассона функции $\bar{\psi}$ с БРСТ-генератором будет содержать также член, соответствующий 4-духовому взаимодействию

$$\bar{\rho}_\alpha c^\beta c^\gamma\{\chi^\alpha,\ U^{(1)}{}_{\gamma\beta}{}^\delta\}\bar{\rho}_\delta = \frac{i}{2}\bar{\eta}_\mu\bar{\mathcal{P}}_\sigma\{\chi^\mu,\ C^\sigma{}_{\nu\lambda}\}\eta^\nu\eta^\lambda. \tag{5.80}$$

Этот член будет отличен от нуля, если фиксирующая калибровку функция χ^μ зависит от импульсов p^{ij}, сопряженных компонентам 3-метрики. 4-духовое взаимодействие не может быть исключено при интегрировании по духовым импульсам; поэтому ясно, что квантование по Баталину – Вилковыскому в лагранжевом формализме и квантование по БФВ в расширенном фазовом пространстве приводят к теориям с различными эффективными действиями.

Очевидно, причина этого заключается в том, что группа преобразований, генерируемых связями, отличается от группы калибровочных преобразований в лагранжевом формализме. Духовые секторы оказываются различными в лагранжевой и гамильтоновой формулировках. Это не имеет существенного значения, когда тот или иной формализм используется для построения теории S-матрицы, т. е. теории переходов между асимптотическими состояниями. В этом случае духовый сектор исключается с помощью асимптотических граничных условий, и мы получаем калибровочно-инвариантную теорию. Сложнее обстоит дело в квантовой геометродинамике: в замкнутой вселенной нет асимптотических состояний, и вопрос о возможности выделения калибровочно-инвариантного сектора должен исследоваться отдельно.

5.4. Модель с конечным числом степеней свободы

Неэквивалентность лагранжева и гамильтонова формализмов можно проиллюстрировать на примере модели с конечным числом степеней свободы. Рассмотрим действие

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2}\nu\dot{q}_A\dot{q}^A - \frac{1}{\nu}U(q)\right]. \tag{5.81}$$

Можно показать, что для некоторых космологических моделей в определенной параметризации действие может быть представлено в виде (5.81) (в частности, для модели Бианки IX). Здесь ν – калибровочная переменная. Можно убедиться, что действие (5.81) инвариантно относительно преобразований

$$\delta t = \theta(t);\ \delta\nu = \nu\dot{\theta} - \dot{\nu}\theta;\ \delta q^A = -\dot{q}^A\theta. \tag{5.82}$$

Усложним ситуацию, введя произвольную параметризацию калибровочной переменной

$$\nu = v(\mu,\ q). \tag{5.83}$$

Действие примет вид

$$S_1 = \int dt \left[\frac{1}{2}v(\mu,\ q)\dot{q}_A\dot{q}^A - \frac{1}{v(\mu,\ q)}U(q)\right]. \tag{5.84}$$

Найдем преобразования новой калибровочной переменной μ:

$$\delta\nu = \frac{\partial v}{\partial\mu}\delta\mu + \frac{\partial v}{\partial q^A}\delta q^A; \tag{5.85}$$

$$\delta\mu = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial\mu}}\left(\delta\nu - \frac{\partial v}{\partial q^A}\delta q^A\right) = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial\mu}}\left(\nu\dot{\theta} - \dot{\nu}\theta + \frac{\partial v}{\partial q^A}\dot{q}^A\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial\mu}}\left(v(\mu,\ q)\dot{\theta} - \frac{\partial v}{\partial\mu}\dot{\mu}\theta - \frac{\partial v}{\partial q^A}\dot{q}^A\theta + \frac{\partial v}{\partial q^A}\dot{q}^A\theta\right) = w(\mu,\ q)\dot{\theta} - \dot{\mu}\theta, \tag{5.86}$$

где

$$w(\mu,\ q) \equiv \frac{1}{\dfrac{\partial v}{\partial \mu}} v(\mu,\ q). \tag{5.87}$$

Можно убедиться, что преобразования

$$\delta\mu = w(\mu,\ q)\dot{\theta} - \dot{\mu}\theta;\ \delta q^A = -\dot{q}^A\theta \tag{5.88}$$

имеют замкнутую алгебру независимо от выбранной параметризации. Так,

$$\delta_\xi\delta_\theta q^A = \left(\dot{q}^A\xi\right)^{\cdot}\theta = \ddot{q}^A\xi\theta + \dot{q}^A\dot{\xi}\theta; \tag{5.89}$$

$$\delta_\xi\delta_\theta q^A - \delta_\theta\delta_\xi q^A = -\dot{q}^A\left(\dot{\theta}\xi - \dot{\xi}\theta\right); \tag{5.90}$$

$$\begin{gathered}\delta_\xi\delta_\theta\mu = \frac{\partial w}{\partial\mu}\left(w(\mu,\ q)\dot{\xi} - \dot{\mu}\xi\right)\dot{\theta} - \frac{\partial w}{\partial q^A}\dot{q}^A\xi\dot{\theta} - \\ -\left(w(\mu,\ q)\dot{\xi} - \dot{\mu}\xi\right)^{\cdot}\theta = \frac{\partial w}{\partial\mu}w(\mu,\ q)\dot{\xi}\dot{\theta} - \frac{\partial w}{\partial\mu}\dot{\mu}\xi\dot{\theta} - \\ -\frac{\partial w}{\partial q^A}\dot{q}^A\xi\dot{\theta} - \frac{\partial w}{\partial\mu}\dot{\mu}\dot{\xi}\theta - \frac{\partial w}{\partial q^A}\dot{q}^A\dot{\xi}\theta - w(\mu,\ q)\ddot{\xi}\theta + \ddot{\mu}\xi\theta + \dot{\mu}\dot{\xi}\theta;\end{gathered} \tag{5.91}$$

$$\delta_\xi\delta_\theta\mu - \delta_\theta\delta_\xi\mu = w(\mu,\ q)\left(\dot{\theta}\xi - \dot{\xi}\theta\right)^{\cdot} - \dot{\mu}\left(\dot{\theta}\xi - \dot{\xi}\theta\right). \tag{5.92}$$

В скобках в (5.90), (5.92) появляется выражение, аналогичное производной Ли векторного поля.

Будем далее использовать специальный класс дифференциальных калибровок. В самом деле, любое калибровочное условие, накладываемое на новую калибровочную переменную μ,

$$\mu = f(q), \tag{5.93}$$

можно представить в дифференциальной форме:

$$\dot{\mu} = f_{,A}\dot{q}^A;\ f_{,A} \equiv \frac{\partial f}{\partial q^A}. \tag{5.94}$$

Духовая часть эффективного действия Фаддеева – Попова:

$$S_{(ghost)} = \int dt\bar{\eta}\left(w(\mu,\ q)\dot{\eta} - \dot{\mu}\eta + f_{,A}\dot{q}^A\eta\right)^{\cdot} = -\int dt\dot{\bar{\eta}}\left[w(\mu,\ q)\dot{\eta} - \left(\dot{\mu} - f_{,A}\dot{q}^A\right)\eta\right]. \tag{5.95}$$

Духи Фаддеева – Попова удобно переопределить следующим образом:

$$\eta \to \eta;\ \bar{\eta} \to -i\bar{\eta}. \tag{5.96}$$

Удобство этой эамены в том, что лагранжиан является действительным, если переменные η, $\bar{\eta}$ действительны, и выполняется правило комплексного сопряжения для грассмановых переменных

$$(\bar{\eta}\eta)^* = \eta^*\bar{\eta}^*. \tag{5.97}$$

Эффективное действие Фаддеева – Попова, следовательно, будет иметь вид:

$$S_{(FP)} = \int dt \left[\frac{1}{2}v(\mu,\ q)\dot{q}_A\dot{q}^A - \frac{1}{v(\mu,\ q)}U(q) + \lambda\left(\dot{\mu} - f_{,A}\dot{q}^A\right) + \right.$$

$$\left. + iw(\mu,\ q)\dot{\bar{\eta}}\dot{\eta} - i\dot{\bar{\eta}}\left(\dot{\mu} - f_{,A}\dot{q}^A\right)\eta\right] = \int dt \left[\frac{1}{2}v(\mu,\ q)\dot{q}_A\dot{q}^A - \frac{1}{v(\mu,\ q)}U(q) + \pi\left(\dot{\mu} - f_{,A}\dot{q}^A\right) + \right.$$

$$\left. + iw(\mu,\ q)\dot{\bar{\eta}}\dot{\eta}\right], \tag{5.98}$$

где была сделана замена

$$\pi = \lambda - i\dot{\bar{\eta}}\eta. \tag{5.99}$$

Выпишем полную систему уравнений движения, получающуюся варьированием эффективного действия (5.98), включая уравнения для духов и калибровочное условие:

$$\left(v(\mu,\ q)\dot{q}^A\right)^{\cdot} - \frac{1}{2}v^{,A}\dot{q}_B\dot{q}^B - \frac{1}{v^2(\mu,\ q)}v^{,A}U(q) + \frac{1}{v(\mu,\ q)}U^{,A} - \dot{\pi}f^{,A} - iw^{,A}\dot{\bar{\eta}}\dot{\eta} = 0; \tag{5.100}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \mu}\dot{q}_A\dot{q}^A + \frac{1}{v^2(\mu,\ q)}\frac{\partial v}{\partial \mu}U(q) - \dot{\pi} + i\frac{\partial w}{\partial \mu}\dot{\bar{\eta}}\dot{\eta} = 0; \tag{5.101}$$

$$\left(w(\mu,\ q)\dot{\bar{\eta}}\right)^{\cdot} = 0; \tag{5.102}$$

$$\left(w(\mu,\ q)\dot{\eta}\right)^{\cdot} = 0; \tag{5.103}$$

$$\dot{\mu} = f_{,A}\dot{q}^A. \tag{5.104}$$

Подстановка тривиальных решений для духов и лагранжева множителя π (которые должны выделяться асимптотическими граничными условиями, если мы забудем на время о проблеме копий Грибова) превращает систему уравнений (5.100) – (5.104) в замкнутую калибровочно-инвариантную систему уравнений для переменных q^A, в которой μ выступает как неопределенный параметр:

$$\left(v(\mu,\ q)\dot{q}^A\right)^{\cdot} - \frac{1}{2}v^{,A}\dot{q}_B\dot{q}^B - \frac{1}{v^2(\mu,\ q)}v^{,A}U(q) + \frac{1}{v(\mu,\ q)}U^{,A} = 0; \tag{5.105}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \mu}\dot{q}_A\dot{q}^A + \frac{1}{v^2(\mu,\ q)}\frac{\partial v}{\partial \mu}U(q) = 0. \tag{5.106}$$

Очевидно, уравнения (5.105), (5.106) получаются варьированием действия исходной теории (5.84).

Уравнение (5.106) (или (5.101)) – уравнение связи в лагранжевом формализме. Построим теперь гамильтониан $H_{(0)}$, введя обобщенные импульсы:

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} = v(\mu,\ q)\dot{q}_A; \tag{5.107}$$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}} = 0; \tag{5.108}$$

$$H_{(0)} = p_A\dot{q}^A - L = \frac{1}{2}\frac{1}{v(\mu,\ q)}p_A p^A + \frac{1}{v(\mu,\ q)}U(q). \tag{5.109}$$

Уравнение (5.108) дает первичную связь; вторичную связь находим обычным образом:

$$\dot{\pi} = \{\pi,\ H_{(0)}\} = -\frac{\partial H_{(0)}}{\partial\mu} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{v^2(\mu,\ q)}\frac{\partial v}{\partial\mu}p_A p^A + \frac{1}{v^2(\mu,\ q)}\frac{\partial v}{\partial\mu}U(q) = 0. \tag{5.110}$$

Оказалось, что связь зависит от калибровочной переменной. Это следствие выбора достаточно широкого класса параметризаций (5.83), чего не предполагается в дираковской теории. Если мы ограничим класс параметризаций, мы избавимся от зависимости связи от переменной μ:

$$\nu = v(\mu,\ q) = \frac{1}{\mu}u(q); \tag{5.111}$$

связь принимает вид:

$$T = \frac{1}{2u(q)}p_A p^A + \frac{1}{u(q)}U(q). \tag{5.112}$$

При этом гамильтониан $H_{(0)}$ становится пропорциональным связи, калибровочная переменная μ становится лагранжевым множителем:

$$H_{(0)} = \mu T = \frac{\mu}{2u(q)}p_A p^A + \frac{\mu}{u(q)}U(q). \tag{5.113}$$

Итак, в этом случае у нас имеется набор связей

$$G_\alpha = (\pi,\ T). \tag{5.114}$$

Связь (5.112) квадратична по импульсам, так же как гамильтонова связь (5.51) теории гравитации.

Теория является абелевой; БРСТ-генератор выглядит очень просто:

$$\Omega = c^\alpha G_\alpha = \frac{1}{u(q)}\left(\frac{1}{2}p_A p^A + U(q)\right)\eta - i\mathcal{P}\pi; \tag{5.115}$$

$$c^\alpha = (-i\mathcal{P},\ \eta);\ \bar{\rho}_\alpha = (i\bar{\eta},\ \bar{\mathcal{P}}) \tag{5.116}$$

– духи БФВ. Эффективный гамильтониан, в соответствие с предписанием БФВ, представляет собой скобку Пуассона функции

$$\bar{\psi} = i\bar{\eta}\chi(q,\ p) + \bar{\mathcal{P}}\mu \tag{5.117}$$

с генератором Ω:

$$H_{(eff)} = \{\bar{\psi},\ \Omega\} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial q^A}\frac{\partial\Omega}{\partial p_A} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial p_A}\frac{\partial\Omega}{\partial q^A} + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\pi} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\pi}\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} +$$

$$-\frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\eta}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\bar{\mathcal{P}}}-\frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\bar{\mathcal{P}}}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\eta}-\frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\bar{\eta}}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\mathcal{P}}-\frac{\delta^r\bar{\psi}}{\delta\mathcal{P}}\frac{\delta^l\Omega}{\delta\bar{\eta}}=$$

$$=i\bar{\eta}\{\chi,\ T\}\eta-i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}-\mu T(q,\ p)-\pi\chi(q,\ p). \tag{5.118}$$

Тогда эффективное действие будет иметь вид:

$$S_{(BFV)}=\int dt\left[p_A\dot{q}^A+\pi\mu+\dot{c}^\alpha\bar{\rho}_\alpha+\{\bar{\psi},\ \Omega\}\right]=$$

$$=\int dt\left[p_A\dot{q}^A+\pi\mu+\dot{\mathcal{P}}\bar{\eta}+\dot{\eta}\bar{\mathcal{P}}+i\bar{\eta}\{\chi,\ T\}\eta-i\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}-\mu T(q,\ p)-\pi\chi(q,\ p)\right]. \tag{5.119}$$

Духовый сектор в эффективном действии БФВ (5.119) не совпадает с духовым сектором в действии Фаддеева – Попова (5.98), в чем можно убедиться, проведя интегрирования по духовым переменных в континуальном интеграле с эффективным действием (5.119). Причина этого в том, что духовая часть действия Фаддеева – Попова определяется видом калибровочных преобразований. Действие БФВ строится по другим правилам, и лишь в определенных случаях может давать результат, согласующийся с тем, что мы имеем в лагранжевом формализме.

Легко проверить, что связь (5.112) генерирует преобразования, которые не совпадают с калибровочными преобразованиями (5.88) для переменных μ, q^A:

$$\delta q^A=\{q^A,\ T\}\theta=\frac{\partial T}{\partial p_A}\theta=\frac{1}{u(q)}p^A\theta=\frac{1}{\mu}\dot{q}^A\theta; \tag{5.120}$$

$$\delta\mu=\{\mu,\ T\}\theta=\frac{\partial T}{\partial\pi}\theta=0. \tag{5.121}$$

Поэтому и БРСТ-преобразования, генерируемые Ω, не совпадают с калибровочными преобразованиями, в которых инфинитезимальный параметр заменен грассмановой переменной:

$$\delta q^A=\{q^A,\ \Omega\}\bar{\varepsilon}=\frac{\partial T}{\partial p_A}\eta\bar{\varepsilon}=\frac{1}{u(q)}p^A\eta\bar{\varepsilon}=\frac{1}{\mu}\dot{q}^A\eta\bar{\varepsilon}; \tag{5.122}$$

$$\delta\mu=\{\mu,\ \Omega\}\bar{\varepsilon}=-i\mathcal{P}\bar{\varepsilon}. \tag{5.123}$$

Из гамильтоновых уравнений с эффективным гамильтонианом (5.118) следует

$$\dot{\eta}=\frac{\partial H_{(eff)}}{\partial\bar{\mathcal{P}}}\Rightarrow\mathcal{P}=-i\dot{\eta}, \tag{5.124}$$

откуда

$$\delta\mu=-\dot{\eta}\bar{\varepsilon}. \tag{5.125}$$

Итак, для простой модели, описываемой действием (5.84), даже в суженном классе параметризаций (5.111), метод Баталина – Вилковыского в лагранжевом формализме и метод БФВ в расширенном фазовом пространстве дают неэквивалентные теории, которые могут быть согласованы лишь в калибровочно-инвариантном секторе при наличии асимптотических состояний.

Заметим, что, тем не менее, возможно построить гамильтонову динамику в расширенном фазовом пространстве, эквивалентную лагранжевой динамике, вытекающей из эффективного действия (5.98), причем для произвольной параметризации из класса (5.83). Калибровочное условие (5.94) в дифференциальной форме вводит в лагранжиан недостающую скорость $\dot{\mu}$, благодаря чему оказывается возможным ввести обобщенные импульсы для всех переменных и построить гамильтониан в расширенном фазовом пространстве по обычным правилам:

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} = v(\mu,\ q)\dot{q}_A - \pi f_{,A}; \tag{5.126}$$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}}; \tag{5.127}$$

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = iw(\mu,\ q)\dot{\bar{\eta}}; \tag{5.128}$$

$$\mathcal{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\eta}}} = iw(\mu,\ q)\dot{\eta}. \tag{5.129}$$

Отсюда

$$\dot{q}^A = \frac{1}{v(\mu,\ q)}\left(p^A + \pi f^{,A}\right); \tag{5.130}$$

$$\dot{\bar{\eta}} = -\frac{i}{w(\mu,\ q)}\bar{\mathcal{P}}; \tag{5.131}$$

$$\dot{\eta} = -\frac{i}{w(\mu,\ q)}\mathcal{P}; \tag{5.132}$$

$$\begin{aligned} H = p_A\dot{q}^A + \pi\dot{\mu} + \bar{\mathcal{P}}\dot{\eta} + \dot{\bar{\eta}}\mathcal{P} - L\ &= \frac{1}{v(\mu,\ q)}\left(p_A p^A + \pi p_A f^{,A}\right) + \pi\dot{\mu} - \frac{2i}{w(\mu,\ q)}\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} - \\ &-\frac{1}{2v(\mu,\ q)}\left(p_A p^A + 2\pi p_A f^{,A} + \pi^2 f_{,A} f^{,A}\right) + \frac{1}{v(\mu,\ q)}U(q) - \\ &-\pi\dot{\mu} + \frac{1}{v(\mu,\ q)}\left(\pi p_A f^{,A} + \pi^2 f_{,A} f^{,A}\right) + \frac{i}{w(\mu,\ q)}\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} = \\ &= \frac{1}{2v(\mu,\ q)}\left(p_A p^A + 2\pi p_A f^{,A} + \pi^2 f_{,A} f^{,A}\right) + \frac{1}{v(\mu,\ q)}U(q) - \frac{i}{w(\mu,\ q)}\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}. \end{aligned} \tag{5.133}$$

Выпишем систему гамильтоновых уравнений движения:

$$\dot{p}_A = -\frac{\partial H}{\partial q^A};\ \dot{q}^A = \frac{\partial H}{\partial p_A};\ \dot{\pi} = -\frac{\partial H}{\partial \mu};\ \dot{\mu} = \frac{\partial H}{\partial \pi}; \tag{5.134}$$

$$\dot{\bar{\mathcal{P}}} = -\frac{\partial H}{\partial \eta};\ \dot{\eta} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\mathcal{P}}};\ \dot{\mathcal{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{\eta}};\ \dot{\bar{\eta}} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}}; \tag{5.135}$$

$$\dot{p}_A = \frac{1}{2v^2(\mu,\ q)}v_{,A}\left(p_B p^B + 2\pi p_B f^{,B} + \pi^2 f_{,B} f^{,B}\right) -$$

$$-\frac{1}{v(\mu,\ q)}\left(\pi p_B f^{,B}_{,A}+\pi^2 f_{,B} f^{,B}_{,A}\right)+\frac{1}{v^2(\mu,\ q)}v_{,A}U(q)-\frac{1}{v(\mu,\ q)}U_{,A}-\frac{i}{w^2(\mu,\ q)}w_{,A}\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}; \quad (5.136)$$

$$\dot{q}^A=\frac{1}{v(\mu,\ q)}\left(p^A+\pi f^{,A}\right); \quad (5.137)$$

$$\dot{\pi}=\frac{1}{2v^2(\mu,\ q)}\frac{\partial v}{\partial\mu}\left(p_A p^A+2\pi p_A f^{,A}+\pi^2 f_{,A} f^{,A}\right)+\frac{1}{v^2(\mu,\ q)}\frac{\partial v}{\partial\mu}U(q)-\frac{i}{w^2(\mu,\ q)}\frac{\partial w}{\partial\mu}\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}; \quad (5.138)$$

$$\dot{\mu}=\frac{1}{v(\mu,\ q)}\left(p_A f^{,A}+\pi f_{,A} f^{,A}\right); \quad (5.139)$$

$$\dot{\bar{\mathcal{P}}}=0; \quad (5.140)$$

$$\dot{\eta}=-\frac{i}{w(\mu,\ q)}\mathcal{P}; \quad (5.141)$$

$$\dot{\mathcal{P}}=0; \quad (5.142)$$

$$\dot{\bar{\eta}}=-\frac{i}{w(\mu,\ q)}\bar{\mathcal{P}}. \quad (5.143)$$

Можно убедиться, что система гамильтоновых уравнений (5.136) – (5.143) полностью эквивалентна лагранжевой системе (5.100) – (5.104), причем уравнение связи (5.101) и калибровка (5.104) приобретают статус гамильтоновых уравнений (5.138), (5.139). Первичная связь в формализме расширенного фазового пространства исчезают; вторичная связь модифицируется за счет введения в действие фиксирующего калибровку условия и духов.

Из уравнений (5.136) – (5.143) следует, что сохраняется величина

$$\Omega_1=-H\eta-i\pi\mathcal{P}. \quad (5.144)$$

Эта величина нильпотентна и является генератором следующих преобразований:

$$\delta q^A=\{q^A,\ \Omega_1\}\bar{\varepsilon}=-\frac{\partial H}{\partial p_A}\eta\bar{\varepsilon}=-\dot{q}^A\eta\bar{\varepsilon}; \quad (5.145)$$

$$\delta\mu=\{\mu,\ \Omega_1\}\bar{\varepsilon}=-\frac{\partial H}{\partial\pi}\eta\bar{\varepsilon}-i\mathcal{P}\bar{\varepsilon}=w(\mu,\ q)\dot{\eta}\bar{\varepsilon}-\dot{\mu}\eta\bar{\varepsilon}; \quad (5.146)$$

$$\delta\eta=\{\eta,\ \Omega_1\}\bar{\varepsilon}=0; \quad (5.147)$$

$$\delta\bar{\eta}=\{\bar{\eta},\ \Omega_1\}\bar{\varepsilon}=-i\pi\bar{\varepsilon}; \quad (5.148)$$

$$\delta p_A=\{p_A,\ \Omega_1\}\bar{\varepsilon}=\frac{\partial H}{\partial q^A}\eta\bar{\varepsilon}=-\dot{p}_A\eta\bar{\varepsilon}; \quad (5.149)$$

$$\delta\pi=\{\pi,\ \Omega_1\}\bar{\varepsilon}=\frac{\partial H}{\partial\mu}\eta\bar{\varepsilon}=-\dot{\pi}\eta\bar{\varepsilon}; \quad (5.150)$$

$$\delta\bar{\mathcal{P}}=\{\bar{\mathcal{P}},\ \Omega_1\}\bar{\varepsilon}=H\bar{\varepsilon}; \quad (5.151)$$

$$\delta\mathcal{P}=\{\mathcal{P},\ \Omega_1\}\bar{\varepsilon}=0. \quad (5.152)$$

Преобразования (5.145) – (5.148) есть БРСТ-преобразования в лагранжевой форме, что позволяет считать Ω_1 (5.144) генератором БРСТ-преобразований.

Итак, для нашей простой модели гамильтонов формализм можно построить двумя различными путями, в результате чего мы получаем теории, инвариантные относительно разных групп преобразований, чему соответствует существование двух генераторов (5.115) и (5.144). Интересно отметить, что требование БРСТ-инвариантности волновой функции приводит к совершенно разным результатам: в подходе БФВ требование БРСТ-инвариантности

$$\hat{\Omega}\,|\,\Psi>=c^{\alpha}\hat{G}_{\alpha}\,|\,\Psi>=0 \tag{5.153}$$

в силу независимости духов БФВ c^{α} немедленно приводит в уравнению Уилера – Де Витта (операторной форме связи (5.112)):

$$\hat{T}\,|\,\Psi>=0. \tag{5.154}$$

В то же время, условие

$$\hat{\Omega}_1\,|\,\Psi>=0, \tag{5.155}$$

где Ω_1 дается формулой (5.144), не приводит к уравнению Уилера – Де Витта. Смысл условия (5.155) более проблематичен: генератор Ω в этом случае не может быть представлен как линейная комбинация связей (в отличие от (5.115)).

Можно предположить, что условие (5.155) вместе с квантовым аналогом первичной связи

$$\hat{\pi}\,|\,\Psi>=0 \tag{5.156}$$

приводит к уравнению Уилера – Де Витта (По крайней мере, в случае, когда система обладает асимптотическими состояниями, мы можем ожидать, что выполняется условие (5.156)). Однако, при любом выборе способа упорядочения операторов в гамильтониане (5.133), совместимом с условием эрмитовости гамильтониана, дополнительное условие (5.156) не позволяет свести требование БРСТ-инвариантности (5.155) к уравнению Уилера – Де Витта (5.154). Причина этого заключается в некоммутативности операторов. Более последовательный путь, позволяющий избежать проблем, связанных с некоммутативностью операторов, состоит в том, чтобы выделить тривиальные решения для духов и лагранжевого множителя (скажем, с помощью тех же асимптотических граничных условий), в результате чего уравнение (5.138) сведется (при ограничении класса параметризаций (5.111)) к дираковской вторичной связи (5.112), а условие БРСТ-инвариантности (5.155) – к уравнению Уилера – Де Витта. Именно этот путь подразумевается в подходе БФВ. Действительно, первоначально подход БФВ был разработан для построения S-матрицы произвольной физической системы со связями, что предполагает наличие асимптотических состояний, а, следовательно, и выполнение условий $\pi = 0$, $T = 0$. В общем же случае условие (5.155) не приводит к уравнению Уилера – Де Витта.

Рассмотренная простая модель с конечным числом степеней свободы показывает, сколь далеко еще от завершения построение квантовой теории гравитации: использование стандартных методов квантования, успешно применявшихся для негравитационных полей, в случае гравитации порождает вопросы, связанные с особенностями и сложностью этой теории. В частности, обращает на себя внимание неэквивалентность лагранжевой и гамильтоновой (обобщенной Дираком) динамики гравитационного поля и связанное с этой неэквивалентностью различие в группах преобразований, относительно которых инвариантны действия в лагранжевой и гамильтоновой форме. Поэтому остается открытым вопрос, правомерно ли использование подхода БФВ для квантования гравитационного поля, в особенности космологических моделей, или следует искать совершенно новые подходы для объединения гравитации и квантовой теории.

Дополнение. Вывод уравнения Шредингера из гамильтоновых (операторных) уравнений движения

Как уже говорилось выше, операторное квантование является альтернативой квантованию методом континуального интеграла. В частности, уравнение Шредингера может быть получено непосредственно из континуального интеграла, либо (в операторном формализме) может быть выведено из гамильтоновых уравнений движения в операторной форме. Необходимым условием возможности вывода уравнения Шредингера из гамильтоновых уравнений движения является существование коммутационных соотношений между парами канонических переменных фазового пространства. Коммутационные соотношения в случае теории со связями не могут быть введены в исходном фазовом пространстве в силу вырожденности теории, однако это может быть сделано в редуцированном фазовом пространстве, либо в расширенном фазовом пространстве, после того, как мы откалибруем теорию и тем самым перейдем к невырожденной теории.

Ниже мы воспроизведем вывод уравнения Шредингера, не конкретизируя, о каком фазовом пространстве идет речь, лишь предполагая, что на переменные этого фазового пространства в процессе квантования накладываются коммутационные соотношения. В результате мы получим уравнение Шредингера в виде

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\,\psi> = \hat{H}\,|\,\psi> \ . \qquad (Д.1)$$

Подчеркнем, однако, что данная процедура вывода уравнения Шредингера ни в коей мере не решает проблему упорядочения операторов в правой части (Д.1). В обычной квантовой теории поля (квантовой теории негравитационных полей) и квантовой механике эта проблема решается путем согласования с экспериментом. При выводе уравнения Шредингера из континуального интеграла способ упорядочения операторов находится в достаточно жестком соответствии с выбором меры в континуальном интеграле, вследствие чего последний также диктуется экспериментом.

Итак, мы имеем систему классических канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q};\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad (Д.2)$$

или

$$\dot{p} = \{p,\ H\};\ \dot{q} = \{q,\ H\}. \qquad (Д.3)$$

При квантовании скобка Пуассона величин $F,\ H$ переходит в коммутатор:

$$\{F,\ H\} \to -\frac{i}{\hbar}[\hat{F},\ \hat{H}]. \qquad (Д.4)$$

Таким образом, справедливы уравнения для операторов (принцип соответствия):

$$\dot{\hat{p}} = -\frac{i}{h}\left(\hat{p}\hat{H} - \hat{H}\hat{p}\right); \tag{Д.5}$$

$$\dot{\hat{q}} = -\frac{i}{h}\left(\hat{q}\hat{H} - \hat{H}\hat{q}\right); \tag{Д.6}$$

Для любых произвольных векторов состояний $|\,\psi_1 >$, $|\,\psi_2 >$ из (Д.5), (Д.6) следуют уравнения для матричных элементов:

$$< \psi_2\,|\,\dot{\hat{p}}\,|\,\psi_1 >= -\frac{i}{h}\Big(< \psi_2\,|\,\hat{p}\hat{H}\,|\,\psi_1 > \; - \; < \psi_2\,|\,\hat{H}\hat{p}\,|\,\psi_1 >\Big); \tag{Д.7}$$

$$< \psi_2\,|\,\dot{\hat{q}}\,|\,\psi_1 >= -\frac{i}{h}\Big(< \psi_2\,|\,\hat{q}\hat{H}\,|\,\psi_1 > \; - \; < \psi_2\,|\,\hat{H}\hat{q}\,|\,\psi_1 >\Big). \tag{Д.8}$$

До сих пор мы использовали представление Гейзенберга (операторы зависят от времени). Теперь перейдем к представлению Шредингера, использовав квантовомеханическую теорему о том, что среднее значение от производной по времени некоторой физической величины равно производной по времени среднего значения этой величины:

$$< \psi_2\,|\,\dot{\hat{p}}\,|\,\psi_1 >= \frac{\partial}{\partial t} < \psi_2\,|\,\hat{p}\,|\,\psi_1 > \tag{Д.9}$$

и т. п. Уравнение (Д.7) перепишется как

$$\frac{\partial}{\partial t} < \psi_2\,|\,\hat{p}\,|\,\psi_1 >= -\frac{i}{h}\Big(< \psi_2\,|\,\hat{p}\hat{H}\,|\,\psi_1 > \; - \; < \psi_2\,|\,\hat{H}\hat{p}\,|\,\psi_1 >\Big). \tag{Д.10}$$

Теперь зависимость от времени переносится на вектора состояния:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} < \psi_2\,|\right)\hat{p}\,|\,\psi_1 > + < \psi_2\,|\,\hat{p}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,|\,\psi_1 >\right) =$$

$$= -\frac{i}{h}\Big(< \psi_2\,|\,\hat{p}\hat{H}\,|\,\psi_1 > - < \psi_2\,|\,\hat{H}\hat{p}\,|\,\psi_1 >\Big); \tag{Д.11}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} < \psi_2\,| - \frac{i}{h} < \psi_2\,|\,\hat{H}\right)\hat{p}\,|\,\psi_1 > \; + < \psi_2\,|\,\hat{p}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,|\,\psi_1 > + \frac{i}{h}\hat{H}\,|\,\psi_1 >\right) = 0. \tag{Д.12}$$

В силу произвольности векторов состояния $|\,\psi_1 >$, $|\,\psi_2 >$,

$$\hat{p}\,|\,\psi_1 > \neq 0; \tag{Д.13}$$

$$< \psi_2\,|\,\hat{p} \neq 0, \tag{Д.14}$$

из (Д.12) получаем уравнение Шредингера и комплексно-сопряженное ему уравнение:

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\,|\,\psi >= \hat{H}\,|\,\psi >; \tag{Д.15}$$

$$-ih\frac{\partial}{\partial t} < \psi\,| = < \psi\,|\,\hat{H}. \tag{Д.16}$$

Литература

1. R. P. Feynman, "Space-time approach to nonrelativistic quantum electrodynamics", *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948). Русский перевод: Р. Фейнман, "Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механике", в сб.: *Вопросы причинности в квантовой механике*, ИЛ, Москва (1955).

2. Р. Фейнман, А. Хиббс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва (1968).

3. K. S. Cheng, "Quantization of a general dynamical system by Feynman's path integration formulation", *J. Math. Phys.* **13**, 1723 (1972).

4. Т.-П. Ченг, Л.-Ф. Ли, *Калибровочные теории в физике элементарных частиц*, Мир, Москва (1987).

5. Л. Райдер, *Квантовая теория поля*, Мир, Москва (1987).

6. К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля*, в 2-х томах, Мир, Москва (1984).

7. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, Москва (1988).

8. Н. П. Коноплева, В. Н. Попов, *Калибровочные поля*, Атомиздат, Москва (1980).

9. V. N. Gribov, "Quantization of non-Abelian gauge theories", *Nucl. Phys.* **B139**, 1 (1978).

10. П. А. М. Дирак, *Лекции по квантовой механике*, Мир, Москва (1968).

11. P. A. M. Dirac, "Generalized Hamiltonian dynamics", *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950).

12. P. A. M. Dirac, "Generalized Hamiltonian dynamics", *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 326 (1958).

13. Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, Наука, Москва (1986).

14. M. Hennaux, "Hamilton form of the path integral for theories with a gauge freedom", *Phys. Rep.* **126**, 1 (1985).

15. E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky, "Quantization of relativistic systems with constraints", *Phys. Lett.* **B55**, 224 (1975).

16. I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, "Relativistic S-matrix of dynamical systems with boson and fermion constraints", *Phys. Lett.* **B69**, 309 (1977).

17. E. S. Fradkin, T. E. Fradkina, "Quantization of relativistic systems with boson and fermion first- and second-class constraints", *Phys. Lett.* **B72**, 343 (1978).

18. I. A Batalin, G. A. Vilkovisky, "Gauge algebra and quantization", *Phys. Lett.* **B102**, 27 (1981).

19. B. S. DeWitt, "Quantum theory of gravity. I. The canonical theory", *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).

20. S. W. Hawking and D. N. Page, "Operator ordering and the flatness of the Universe", *Nucl. Phys.* **B264**, 185 (1986).