МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л.М. Монастырский

Методика решения задач по механике

Учебно-методическое пособие

Ростов-на-Дону
2016

Учебно-методическое пособие разработано профессором физического факультета Южного федерального университета Л.М.Монастырским.

Ответственный редактор – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой общей физики Физического факультета Южного федерального университета, профессор А.С. Богатин

Компьютерный набор и верстка Л.М.Монастырского

Печатается в соответствии с решением Учебно-методического совета Физического факультета Южного федерального университета, протокол № 2 от 15 ноября 2016 г.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов 1 курса физического факультета и естественных факультетов ЮФУ. В пособии приведена подробная методика решения задач по механике к курсу общей физики, а также большое количество заданий для самостоятельного решения. Оно может использоваться для самостоятельной работы дома при подготовке к семинарским занятиям, а также при проведении семинарских занятий в аудитории.

1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. В течение половины времени движения автомобиль идет со скоростью V_1, в течение другой половины – со скоростью V_2. Какова средняя скорость этого движения. Чему равна средняя скорость движения, если половину пути автомобиль идет со скоростью V_1, а вторую половину пути – со скоростью V_2?

По определению средней скорости можем записать

$$V_{ср} = \frac{S_1 + S_2}{t} = \frac{V_1 t/2 + V_2 t/2}{t} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Во втором случае можем записать

$$V_{ср} = \frac{S}{t_1 + t_2} = \frac{S}{V_1 S/2 + V_2 S/2} = \frac{2V_1 V_2}{V_1 + V_2}.$$

Видно, что в этих двух случаях формулы для расчета средней скорости разные.

1.2. Рыбак едет на лодке вверх по реке. Проезжая под мостом он уронил багор. Через время t_1=30 мин рыбак обнаружил это и, повернув назад, догнал багор на расстоянии S=5 км ниже моста. Какова скорость течения реки, если рыбка, двигаясь вверх и вниз по реке, греб одинаково?

1)Решим задачу в неподвижной системе отсчета. Время движения рыбака от момента потери багра до момента встречи с ним равно

$$t = t_1 + \frac{(V_л - V_р) + S}{V_л + V_р}.$$

С другой стороны, багор плыл по реке время

$$t = S/V_р.$$

Приравняв эти два выражения можно получить

$V_р = S/2t_1 =$ 5 км/ч.

2)Решаем задачу в подвижной системе реки. Лодка сначала удалялась от багра, а затем приближалась к нему с той же скоростью $V_л$. Значит, времена приближения и удаления багра от лодки равны между собой. Следовательно, багор пробыл в воде время $2t_1$. За это время багор удалился от моста на расстояние $S=2V_р t_1$. Откуда получаем тот же результат.

1.3. Эскалатор метрополитена поднимает неподвижно стоящего на нем пассажира в течение 3 мин. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается за 6 мин. Сколько времени будет подниматься пассажир по движущемуся эскалатору?

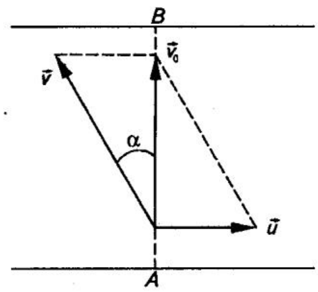
Указания к решению.
Учтите, что пройденный относительно неподвижной системы отсчета путь во всех трех случаях одинаков.

1.4. Скорость пловца относительно воды равна V, скорость течения U. В каком направлении должен двигаться пловец, чтобы попасть в противоположную точку на другом берегу? Сколько времени он будет плыть, если ширина реки равна *l*?

Свяжем неподвижную систему отсчета с берегом и обозначим V_0 – скорость пловца относительно этой системы, тогда по закону сложения скоростей Галилея

$$\vec{V}_0 = \vec{V} + \vec{U}\ .$$

Изобразим эту ситуацию на следующем рисунке:



Так как пловец должен попасть в противоположную точку берега, то вектор $\vec{V}_0$ *должен быть направлен по нормали к течению. Значит, пловец должен двигаться под углом* α *к нормали AB так, что* $\sin\alpha = \dfrac{U}{V}$. *Модуль скорости пловца относительно берега будет равен:*

$$V_0 = \sqrt{V^2 - U^2}\ .$$

Двигаясь относительно берега по линии AB с этой скоростью пловец проплывет путь l за время:

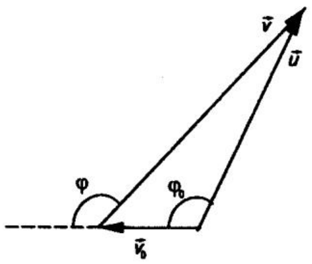
$$t = \frac{l}{\sqrt{V^2 - U^2}}\ .$$

1.5. Корабль идет на запад со скоростью V_0 = 6,5 м/с. Ветер дует с юго-запада со скоростью U=35 м/с. Какую скорость V ветра зарегистрируют приборы на корабле? Каково будет найденное этими приборами направление ветра относительно курса корабля?

По закону сложения скоростей Галилея можем записать:

$$\vec{V} = \vec{U} - \vec{V}_0\,.$$

Изобразим эти векторы на рисунке:



Модуль скорости ветра, зарегистрированной приборами на корабле, найдем по теореме косинусов:

$$V = \sqrt{V_0^2 + U^2 - 2V_0 U \cos\varphi_0}\ .$$

В нашем случае угол φ_0 *=135^0. Тогда окончательно*

V= 37,5 м/с.

Направление ветра относительно корабля найдем по теореме синусов:

$$\frac{\sin(180-\varphi)}{\sin\varphi_0} = \frac{U}{V}\,.$$

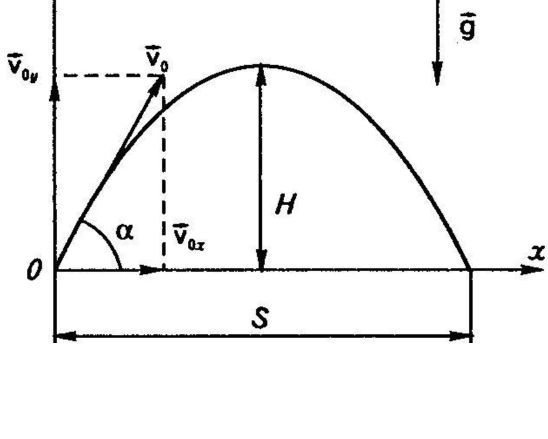
Отсюда получаем:

$$\varphi = 138{,}8^0.$$

2.**КИНЕМАТИКА КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ**

2.1 Тело брошено вверх под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0. Записать закон движения вдоль оси ох и оу, найти уравнение траектории, дальность и максимальную высоту полета. При каком угле α дальность полета максимальна?

Сделаем чертеж, представленный на рисунке. Выберем систему координат в точке броска.



Разложим движение на два независимых: равномерное движение вдоль оси ох и с ускорением g вдоль оси оу. Учтем, что:

$$V_{ox} = V_o \cos\alpha$$
$$V_{oy} = V_o \sin\alpha \, .$$

Запишем систему уравнений, полностью описывающую движение тела:

$$x = V_o \cos\alpha \cdot t$$
$$y = V_o \sin\alpha \cdot t - {gt^2}/{2}$$

$$V_x = V_o \cos\alpha$$
$$V_y = V_o \sin\alpha - gt \, .$$

Чтобы получить уравнение траектории, исключим из первого и второго уравнения время:

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2V_o^2 \cos^2\alpha} \, .$$

Это уравнение параболы с ветвями, направленными вниз.

Найдем дальность полета тела S:

$$S = V_o \cos\alpha \cdot t_{дв} \, .$$

Здесь $t_{дв}$ – время движения тела во время полета:

$$t_{дв} = 2V_o \sin\alpha / g \, .$$

Тогда:

$$S = 2V_o^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha / g = V_o^2 \sin 2\alpha / g \, .$$

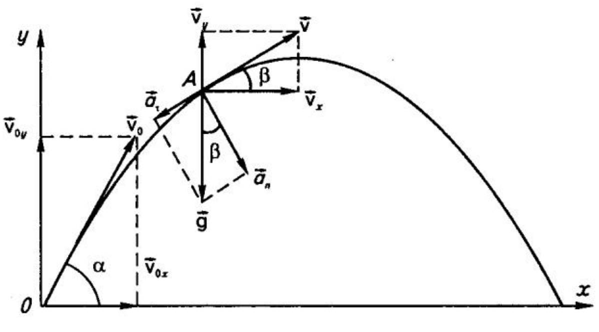
Максимальная дальность полета будет при угле $\alpha = 45^0$.

Максимальная высота подъема равна:

$$H = V_o^2 \sin^2\alpha / 2g \, .$$

2.2 Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью V_o. Найдите радиус кривизны R траектории, тангенциальное и нормальное ускорение тела в некоторый момент времени t.

Пусть в момент времени t тело находится в некоторой точке А траектории.



Мгновенная скорость тела в этой точке равна:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \, .$$

При этом:

$$V_x = V_o \cos\alpha$$
$$V_y = V_o \sin\alpha - gt.$$

Тогда можем записать:

$$V = \sqrt{V_o^2 \cos^2\alpha + (V_o \sin\alpha - gt)^2}\ .$$

Полное ускорение тела в этой точке равно:

$$g = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ .$$

Где:

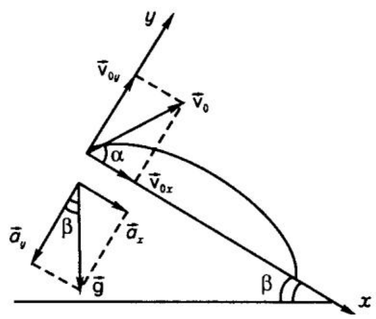
$$a_n = g\cos\beta\ , a_\tau = g\sin\beta\ .$$

Запишем выражение для радиуса кривизны:

$$R = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^2}{g\cos\beta}$$
$$a_n = \frac{gV_x}{V} \qquad .$$
$$a_\tau = \frac{gV_y}{V}$$

2.3 Камень брошен на склоне горы под углом α к ее поверхности. Определите дальность полета камня вдоль склона горы и его наибольшую высоту подъема над склоном, если начальная скорость камня V_o, угол наклона горы к горизонту β.

Выберем систему координат так, как указано на рисунке.



Тогда проекции полного ускорения на оси координат равны:

$$a_x = g\sin\beta, \quad a_y = -g\cos\beta$$

Проекции начальной скорости на оси координат:

$$V_x = V_o\cos\alpha, \quad V_y = V_o\sin\alpha$$

Уравнения движения имеют следующий вид:

$$x = V_o\cos\alpha\cdot t + \frac{g\sin\beta\cdot t^2}{2}$$
$$y = V_o\sin\alpha\cdot t - \frac{g\cos\beta\cdot t^2}{2}.$$

Время движения камня до падения на наклонную плоскость:

$$t_{дв} = \frac{2V_o \sin\alpha}{g\cos\beta}.$$

Дальность полета камня вдоль склона горы:

$$S = V_o\cos\alpha \cdot \frac{2V_o \sin\alpha}{g\cos\beta} + \frac{g\sin\beta \cdot 4V_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2\cos^2\beta}.$$

Максимальная высота подъема камня над склоном:

$$H = \frac{V_o^2 \sin^2\alpha}{2g\cos\beta}.$$

2.4 Точка движется по окружности радиусом R= 2 см. Зависимость пути от времени описывается законом $S= C\,t^3$, где C=0,1 см/$с^2$. Найдите тангенциальное и нормальное ускорение точки в момент времени, когда ее линейная скорость равна V_1=0,3 м/с.

Дифференцируем по времени закон движения и получаем скорость как функцию времени:

$$V=3Ct^2.$$

Тангенциальное ускорение находим по формуле:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 6Ct.$$

Найдем нужный нам момент времени по формуле:

$$t_1 = \sqrt{\frac{V_1}{3C}}.$$

Тогда тангенциальное ускорение равно $a_\tau = 2\sqrt{3CV_1}$ *=0,06 м/$с^2$.*

Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = 4{,}5 \text{ м/с}^2.$$

2.5 Колесо, вращаясь равнозамедленно, за t_1 = 1 мин уменьшило частоту вращения с n_o =300 об/мин до n_1= 180 об/мин. Найдите угловое ускорение ε и число оборотов колеса N_1 за это время. Через какое время t_o колесо остановится? Сколько оборотов оно сделает до остановки?

Уравнение вращательного движения колеса имеет вид:

$$\omega = \omega_o + \varepsilon t$$

$$\varphi = \varphi_o t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Учитывая связь угловой скорости с частотой вращения $\omega = 2\pi n$*,получим:*

$$\varepsilon = \frac{2\pi(n_1 - n_o)}{t_1}.$$

Угол поворота за время t_1 равен:

$$\varphi_1 = \omega_o t_1 + \frac{\varepsilon t_1^2}{2} = \frac{(\omega_o + \omega_1)^2}{2}.$$

Число оборотов колеса за это время равно:

$$N_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{(n_o + n_1)t_1}{2} = 240.$$

Время вращения колеса до остановки равно:

$$t_o = -\frac{\omega_o}{\varepsilon} = 150\,c.$$

Угол поворота до остановки равен:

$$\varphi_o = \omega_o t_o + \frac{\varepsilon t_o^2}{2} = -\frac{\omega_o^2}{2\varepsilon}.$$

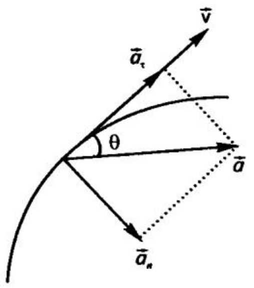
Число оборотов до остановки:

$$N_o = \frac{\varphi_o}{2\pi} = 375.$$

2.6 Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = At$, где A=0,02 рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки будет составлять угол θ=60^0 с ее вектором скорости?

Из рисунка видно, что:

$$tg\theta = \frac{a_n}{a_\tau}.$$



Далее используем следующую связь:

$$a_\tau = \varepsilon R$$

$$a_n = \omega^2 R$$

Тогда :

$$tg\theta = \frac{\omega}{\varepsilon}.$$

Теперь интегрируем дифференциальное уравнение:

$$d\omega = \varepsilon dt = Atdt.$$

Отсюда получим:

$$\omega = \frac{At^2}{2}.$$

Окончательно получим:

$$t = \sqrt[3]{\frac{4tg\,\theta}{A}} = 7\ c\,.$$

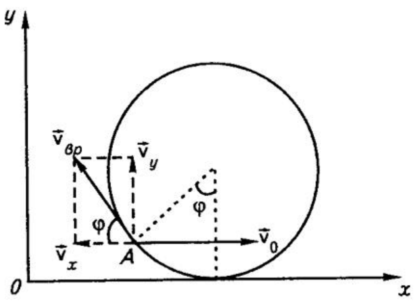
3. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1 Колесо радиусом R катится по дороге без скольжения с поступательной скоростью V_0. Как меняется со временем скорость точки на ободе колеса относительно Земли? Какова траектория движения этой точки? Каково ускорение точек на ободе колеса?

Плоское движение твердого тела можно представить как сумму поступательного и вращательного движения. Представим качение колеса как сумму вращения вокруг оси, проходящей через центр колеса, и поступательного движения этой оси. Скорость каждой точки колеса относительно земли есть сумма скоростей этих двух движений:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_{вр}\,.$$

Выберем произвольную точку на ободе колеса и найдем для нее зависимости скорости и координат от времени.



За время t колесо повернулось на угол $\varphi = \omega \cdot t$. *Тогда можем записать:*

$$V_x = V_0 - \omega R\cos\varphi = V_0 - V_0\cos\omega t$$

$$V_y = \omega R\sin\varphi = V_0\sin\omega t$$

Линейная скорость относительно земли равна:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = V_0\sqrt{2(1-\cos\omega t)}$$

Путем интегрирования получим:

$$x = V_0 t - \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t + C_1$$

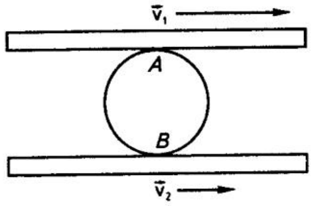
$$y = \frac{V_0}{\omega}\cos\omega t + C_2$$

Постоянные интегрирования C_1 *и* C_2 *определим из начальных условий* $C_1=0$, $C_2=R$. *Окончательно получим:*

$$x = V_0 t - R\sin\omega t$$
$$y = R(1 - \cos\omega t)$$

Эта система уравнений определяет траекторию, которая является циклоидой.

3.2 Цилиндрический каток радиусом R помещен между двумя параллельными рейками. Рейки движутся со скоростями V_1 и V_2 в одну сторону. Определить угловую скорость вращения катка и скорость его центра при отсутствии проскальзывания.



Пусть рейки движутся в одну сторону. Тогда можем записать:

$$V_A = V_1,\ V_B = V_2.$$

Представим движение катка как сумму вращения его вокруг оси симметрии и поступательного движения этой же оси со скоростью V_0. Тогда:

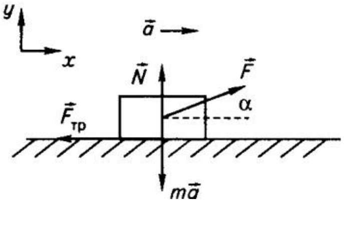
$$V_A = V_0 + \omega R$$
$$V_B = V_0 - \omega R.$$

Отсюда можно найти угловую скорость вращения катка:

$$\omega = \frac{V_1 - V_2}{2R}.$$

4. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

4.1 Тело массой m движется по горизонтальной поверхности под действием силы F, направленной под углом α к горизонту. Найдите ускорение a тела. При каком значении силы F_0 движение будет равномерным? Коэффициент трения равен μ.



Запишем уравнение движения тела в векторном виде:

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

Найдем проекции уравнения движения на выбранные оси координат:

$$ma = F\cos\alpha - F_{тр}$$

$$0 = F\sin\alpha = mg + N$$

Найдем силу трения скольжения:

$$F_{тр} = \mu(mg - F\cos\alpha).$$

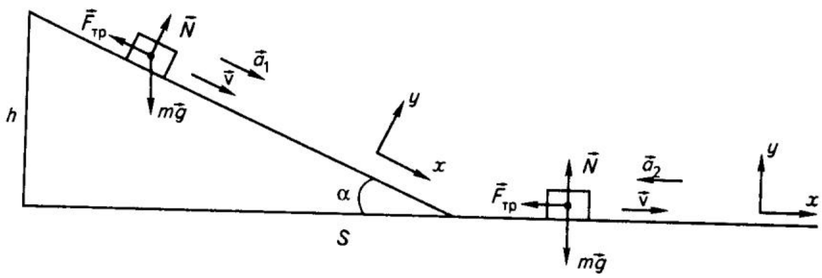
Получим ускорение тела:

$$a = R(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)/m - \mu g.$$

Движение будет равномерным, если:

$$F_0 = \mu mg/(\cos\alpha + \mu\sin\alpha).$$

4.2 Груз скользит с наклонной плоскости высотой h и останавливается на расстоянии S по горизонтали от вершины наклонной плоскости. Найдите коэффициент трения.



Запишем уравнение движения в векторной форме:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

Для наклонной плоскости:

$$\begin{array}{l} ma_1 = mg\sin\alpha - F_{тр} \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \end{array}.$$

Отсюда можно получить:

$$ma_1 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha.$$

Следовательно, на участке спуска:

$$a_1 = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha.$$

На горизонтальном участке уравнение движения будет иметь вид:

$$\begin{array}{l} ma_2 = -\mu N \\ 0 = -mg + N \end{array}.$$

Из этой системы находим:

$$a_2 = -\mu g.$$

Учтем кинематические соотношения:

$$\begin{array}{l} V_1^2 = 2a_1 l_1, \\ l_1 = h/\sin\alpha \end{array}.$$

Конечная скорость на спуске является начальной скоростью при торможении на горизонтальном участке, следовательно:

$$V_1^2 = 2a_2 l_2,$$
$$l_2 = S - h/tg\alpha.$$

Тогда:

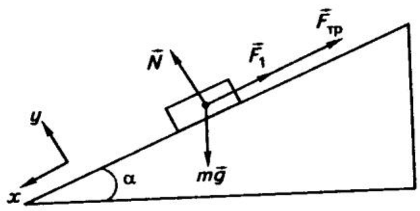
$$2a_1 h/\sin\alpha = 2a_2(S - h/tg\alpha).$$

Окончательно:

$$\mu = h/S.$$

4.3 Чтобы удержать брусок на наклонной плоскости с углом наклона α, надо приложить минимальную силу F_1, а чтобы втащить вверх, надо приложить силу F_2. Найдите коэффициент трения μ.

Рассмотрим первый случай, когда тело удерживают на наклонной плоскости.



Уравнение движения в векторном виде:

$$\vec{F}_1 + F_{тр} + m\vec{g} + \vec{N} = 0.$$

В проекциях на оси координат:

$$-F_1 - \mu N + mg\sin\alpha = 0$$
$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

Отсюда находим:

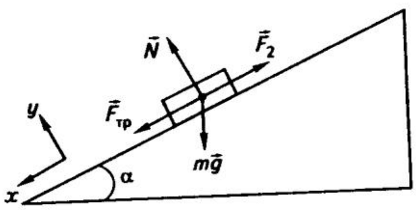
$$F_1 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha.$$

Рассмотрим второй случай, когда брусок втаскивают равномерно вверх. В этом случае меняется не величина, а направление силы трения.

$$F_2 = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha.$$

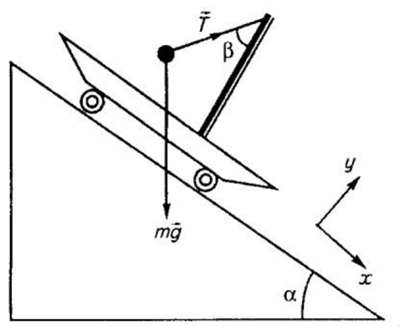
Исключив массу из этих уравнений, получим коэффициент трения:

$$\mu = (F_2 - F_1)tg\alpha/(F_1 + F_2).$$



4.4 На тележке, скатывающейся без тренбия по наклонной плоскости, установлен стержень с подвешенным на нити шариком. Найдите натяжение нити T, если шарик имеет массу 2 кг. Плоскость составляет с горизонтом угол α.

При установившемся движении все точки тележки, стержень, шарик, нить *движутся с одним и тем же ускорением a, направленным вниз вдоль наклонной плоскости.*



Запишем уравнение движения всей тележки в проекции на ось x, направленную вниз вдоль наклонной плоскости:

$$Ma = Mg\sin\alpha$$
$$a = g\sin\alpha \quad .$$

Запишем теперь уравнение движения шарика в проекциях на эту же ось:

$$ma = mg\sin\alpha + T\sin\beta \,.$$

Вдоль оси y имеем:

$$-mg\cos\alpha + T\cos\beta = 0 \,.$$

Отсюда можно получить, что:

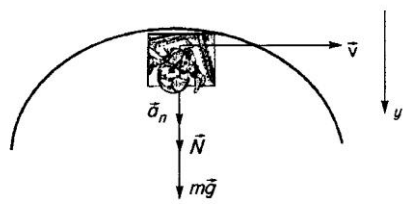
$$\sin\beta = 0 \quad .$$

Следовательно, нить при движении шарика всегда перпендикулярна к наклонной плоскости. Окончательно:

$$T = mg\cos\alpha \,.$$

4.5 Самолет делает мертвую петлю радиусом R. Какую наименьшую скорость V_0 должен иметь самолет в верхней точки петли, чтобы летчик не повис на ремнях, которыми он пристегнут к креслу?

Расставим силы, действующие на летчика в верхней части мертвой петли.



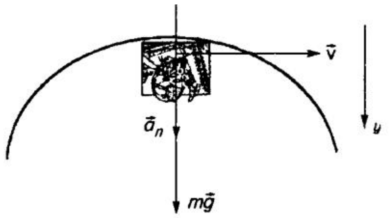
Запишем уравнение движения летчика в верхней части петли:

$$mg + N = \frac{mV^2}{R} \,.$$

При условии $mV^2/R=mg$ реакция опоры обращается в нуль. Отсюда получаем *необходимый результат:*

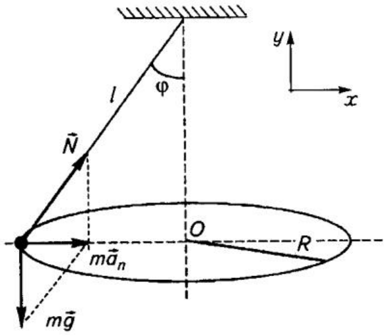
$$V_0 = \sqrt{gR}\,.$$

При малой скорости величина mV^2/R *может стать меньше* mg*, тогда пилот повиснет на ремня*



4.6 Груз, привязанный к нити длиной 1 м, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Определите период обращения груза, если нить отклонилась на угол φ=60^0.

Такой груз называют коническим маятником.



Груз равномерно вращается по окружности радиусом $R = l\sin\varphi$*. Запишем уравнение движения груза в проекциях на оси координат:*

$$\frac{mV^2}{R} = N\sin\varphi$$

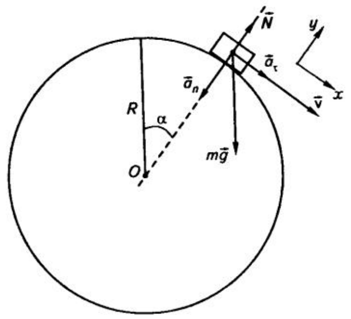
$$0 = -mg + N\cos\varphi$$

Теперь можно получить выражение для периода:

$$T = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi\sqrt{l\cos\varphi / g}\,.$$

4.7 Небольшое тело А соскальзывает с вершины гладкой сферы радиусом R. Найти скорость тела в момент отрыва от поверхности сферы, если: а) его начальная скорость пренебрежимо мала, б) начальная скорость V_0.

Положение тела на сфере будем характеризовать углом α *.*



Запишем уравнение движения в проекциях на оси координат:

$$ma_\tau = mg\sin\alpha$$

$$ma_n = mg\cos\alpha - N$$

Найдем скорость к моменту отрыва. Так как

$$V = \frac{dl}{dt} = \frac{Rd\alpha}{dt},$$

то:

$$dt = \frac{Rd\alpha}{V}.$$

Тогда получим:

$$m\frac{dV}{Rd\alpha}V = mg\sin\alpha \cdot d\alpha.$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dV}{V} = Rg\sin\alpha \cdot d\alpha,$$

Отсюда найдем:

$$V^2 = 2gR(1-\cos\alpha).$$

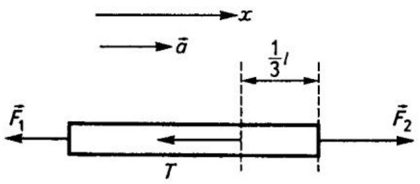
Или окончательно:

$$\begin{array}{l} V^2 = 2gR(1 - V^2/gR) \\ V = \sqrt{2/3gR} \end{array}.$$

Можно найти угол, соответствующий моменту отрыва тела:

$$\alpha = \arccos\sqrt{2/3}.$$

4.8 К концам однородного стержня приложены две противоположно направленные силы F_1 и F_2 (F_1 < F2). Рассчитайте силу натяжения стрежня в поперечном сечении, которое делит стержень на две части в отношении 1:2. *Изобразим эту ситуацию на рисунке.*



Запишем уравнение движения стержня в проекциях на ось x.

$$a = \frac{F_1 - F_2}{m}.$$

Рассмотрим правую часть стержня, составляющую 1/3 от его длины l. На эту часть стержня действует сила натяжения T. Запишем уравнение движения этой части стержня:

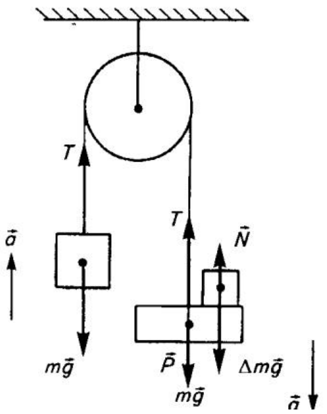
$$a = \frac{F_2 - T}{m}.$$

Выразим силу натяжения:

$$T = \frac{F_1 + F_2}{3}.$$

4.9 Два груза массами по 100 г каждый подвешены на концах нити, перекинутой через неподвижный блок. На один из грузов положен перегрузок массой $\Delta m = 50$ г. С какой силой дубет действовать этот перегрузок на тело, на котором он лежит, когда вся система придет в движение?

Изобразим ислы, действующие на грузы и перегрузок.



Наличие перегрузка на теле приведет к тому, что грузы и блок придут в движение. Запишем уравнения движения всех трех тел:

$$ma = T - mg$$

$$ma = mg + P - T$$

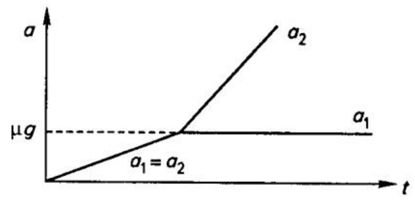
$$\Delta ma = \Delta mg - N$$

Решив эту систему, получим результат:

$$p = 2m\frac{\Delta mg}{\Delta m + m}.$$

4.10 Брусок массой m_1 находится на доске массой m_2, которая лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между бруском и доской равен μ. К доске приложили горизонтальную силу F, зависящую от времени по закону F=kt. Найдите: а) момент времени, когда доска начнет

выскальзывать из-под бруска, б) ускорение бруска a_1 и доски a_2во время движения. Трением между доской и плоскостью можно пренебречь.
Рассмотрим силы, действующие на тела на рисунке.



Пока сила F мала, тело m_1 движется вместе с телом m_2 как одно целое, так как тело m_1 удерживает сила трения покоя. Сила трения покоя в зависимости от величины других сил, приложенных к телу, может изменяться от нуля до максимального значения – силы трения скольжения μN .

Увеличение силы F в конечном итоге приведет к тому, что доска начнет выскальзывать из-под бруска. Запишем уравнение движения бруска и доски в проекциях на ось x:

$$m_1 a_1 = F_{тр}$$

$$m_2 a_2 = F - F_{тр}.$$

Здесь $F_{тр} = F_{тр1} = F_{тр2}$.

Пока предел силы трения не достигнут, тела движутся как одно целое, т.е. a_1=a_2. При этом условии:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

Максимально возможная величина ускорения тела массой m_1:

$$a_1 = \mu g .$$

Когда же сила трения достигнет предела, доска начнет выскальзывать из-под бруска. При этом:

$$a_2 = \frac{F - F_{тр}}{m_2} = \frac{kt - \mu m_1 g}{m_2} .$$

Найдем момент времени, когда ускорение a_2 сравняется с максимально возможной величиной:

$$kt_0 - \mu m_1 g / m_2 = \mu g .$$

Отсюда находим:

$$t_0 = \frac{\mu g (m_1 + m_2)}{k} .$$

Представим этот результат на графике:

4.11 Пуля, пробив доску толщиной k, изменила свою скорость от V_0 до V. Найдите время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной скорости.

Запишем уравнение движения пули в доске:

$$ma_x = -F \,,$$

По условию задачи F=rV. Таким образом, получаем дифференциальное уравнение:

$$m\frac{dV}{dt} = -rV \,.$$

После разделения переменных можем записать:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{rdt}{m} \,.$$

Интегрируем это уравнение:

$$\ln\frac{V}{V_0} = -\frac{rt}{m} \,.$$

Или иначе:

$$V = V_0 \exp(-rt/m) \,.$$

Найдем теперь путь пули в доске:

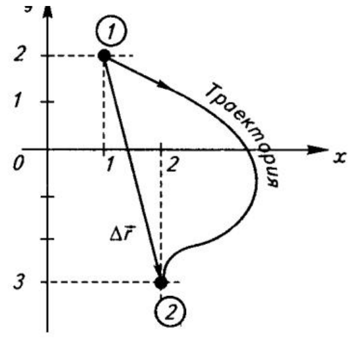
$$h = \int_0^t V dt = \frac{m}{r(V_0 - V)} \,.$$

Найдем время движения пули в доске:

$$t = \frac{g \ln(V_0/V)}{V_0 - V} \,.$$

5. РАБОТА. МОЩНОСТЬ. ЭНЕРГИЯ

5.1. Частица совершила перемещение по некоторой траектории в плоскости xy из точки 1 (1,2) в точку 2 (2,-3). При этом на нее действовали некоторые силы, одна из которых имеет проекции на оси: F_x=3 Н, F_y=4 Н. Найдите работу, которую совершила сила при этом перемещении.



Работа при перемещении из точки 1 в точку 2 определяется интегрированием по траектории:

$$A = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}).$$

В данном случае сила F является постоянной, поэтому ее работа не зависит от формы траектории. Следовательно:

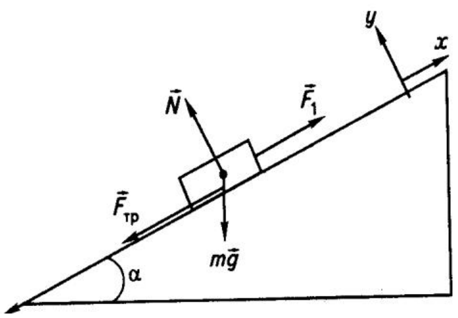
$$A = \vec{F}\int_1^2 d\vec{r} = (\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}).$$

Находим величину скалярного произведения через проекции векторов:

$$A = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z.$$

5.2. Груз массой m=80 кг поднимают вдоль наклонной плоскости с ускорением a=1 м/с^2. Длина наклонной плоскости 3 м, угол α ее наклона к горизонту равен 30^0, а коэффициент трения 0,15. Определите: 1) работу, совершенную подъемным устройством; его среднюю мощность; 3) максимальную мощность . Начальная скорость груза равна нулю.

Чтобы найти работу подъемного устройства, надо сначала найти величину подъемной силы. Для этого рассмотрим все силы, действующие на груз.



Запишем второй закон Ньютона для нашего груза:

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}.$$

В проекциях на оси координат это уравнение имеет вид:

$$F - mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$$
$$N - mg\cos\alpha = 0$$

Учтем, что сила трения скольжения равна $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. *Тогда:*

$$F = (ma + g\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha).$$

Сила тяги постоянна и направлена вдоль перемещения, поэтому ее работа при перемещении на расстояние l равна:

$$A = Fl = (ma + g\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha)\,l.$$ *=1726,5 Дж.*

Средняя мощность за время t по определению равна $N_{ср} = \dfrac{A}{t}$ *. Время подъема груза находим из кинематических соотношений:*

$$t=\sqrt{\frac{2l}{a}}.$$

Чтобы найти максимальную мощность, выясним, как мгновенная мощность зависит от времени.

$$N(t)=FV=Fmat=(ma+g\sin\alpha+\mu mg\cos\alpha)m\sqrt{\frac{2l}{a}}.$$

5.3. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы волоком втащить тело массой m на горку с длиной основания L и высотой H, если коэффициент трения равен μ.

1-й способ.

Работа силы тяги будет минимальна при выполнении следующих условий: в каждой точке траектории сила направлена вдоль скорости (по касательной к траектории); тело при подъеме движется равномерно и достаточно медленно. Тогда на любом малом участке траектории ds_i *сила тяги будет равна:*

$$F_i=mg\sin\alpha_i+\mu mg\cos\alpha_i.$$

Элементарная работа этой силы будет равна:

$$dA=(mg\sin\alpha_i+\mu mg\cos\alpha_i)ds_i.$$

Заметим, что $ds\cdot\sin\alpha=dl$, *а* $ds\cdot\cos\alpha=dh$. *Поэтому:*

$$dA=mg(\mu dl+dh).$$

После интегрирования, получим:

$$A=mg(H+\mu L).$$

2-й способ.

Из энергетических соображений сразу напишем:

$$A=mgH-A_{тр}=mgH+\mu mgL.$$

5.4. Частица движется вдоль оси x под действием силы $F=\alpha x-\beta x^2$, где $\alpha=8Н/м, \beta=6Н/м^2$. Найдите потенциальную энергию U как функцию координаты x и постройте график U(x). В каких точках частица находится в равновесии?

По определению потенциальной энергии элементарная работа силы при перемещении равна взятому с обратным знаком приращению потенциальной энергии:

$$dU=-Fdx.$$

Изменение потенциальной энергии при перемещении из точки x_1 *в точку* x_2 *получаем интегрированием:*

$$U_1-U_2=-\int_{x_1}^{x_2}Fdx=-\int_{x_1}^{x_2}(\alpha x-\beta x^2)dx=\left(-\frac{\alpha x_2^2}{2}+\frac{\beta x_2^3}{3}\right)-\left(-\frac{\alpha x_1^2}{2}+\frac{\beta x_1^3}{3}\right).$$

Следовательно:

$$U(x) = -\frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta x^3}{3}.$$

Потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной. Физический смысл имеет только изменение потенциальной энергии. Пусть эта постоянная равна 0. Примерный график приведен на следующем рисунке:

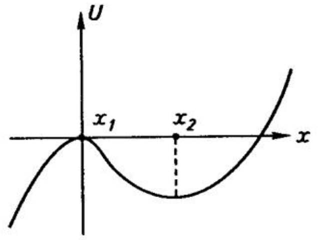


График U(X) пересекает ось абсцисс при x=0 и при $x = \frac{3\alpha}{2\beta} = 2$ *м.*

Определим положения возможного равновесия частицы. В этом положении сила, действующая на частицу, равна 0. Для заданной в условии функции находим условие равновесия: $\alpha x - \beta x^2 = 0$ *. Это уравнение имеет два решения* $x_1=0$ *и* $x_2=4/3$ *м. Положение равновесия соответствует экстремуму потенциальной энергии. Слева от точки* x_1 $F<0$*, т.е. сила направлена от точки* x_1*. Справа же* $F>0$*, т.е. сила опять же направлена от точки* x_1*. Равновесие в этой точке неустойчиво.*

5.5. От груза массой M, висящего на пружине жесткостью k, отрывается часть массой m. На какую высоту поднимется после этого оставшаяся часть груза?

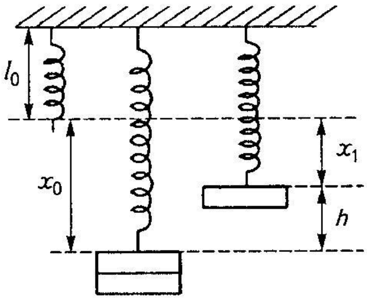
1-й способ.

После отрыва массы m оставшаяся часть груза (M-m) движется в поле двух консервативных сил: силы упругости и силы тяжести. Полная механическая энергия системы сохраняется в процессе движения.

Запишем закон сохранения энергии для оставшейся массы груза. За нулевой уровень потенциальной энергии в поле тяжести примем точку подвеса пружины, а энергию упругих деформаций будем считать равной нулю для недеформированной пружины.

Введем следующие обозначения:

l_0 *–длина пружины в нерастянутом состоянии,* x_0 *–деформация пружины в начальный момент,* x_1 *–в момент наивысшего подъема.*



Будем считать, что кинетическая энергия при отрыве равна нулю. В момент наивысшего подъема оставшегося груза его кинетическая энергия также равна нулю. Поскольку полная механическая энергия неизменна, можно приравнять потенциальные энергии груза (M-m) в момент отрыва части m ив момент наивысшего подъема:

$$-(M-m)g(l_0+x_0)+kx_0^2/2=-(M-m)g(l_0+x_1)+kx_1^2/2.$$

Отсюда находим:

$$x_1=\frac{2(M-m)g}{k}-x_0.$$

Начальную деформацию определяем из условия равновесия груза M:

$$Mg=kx_0 \quad \text{или} \quad x_0=Mg/k.$$

Высота поднятия груза над первоначальным уровнем равна:

$$h=x_0-x_1=\frac{2mg}{k}.$$

2-й способ.

Оставшаяся часть груза будет совершать колебания относительно нового положения равновесия x', определяемого из условия:

$$(M-m)g=kx'.$$

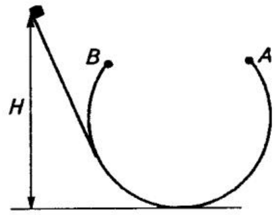
Амплитуда колебания равна:

$$x_0-x'=2x_0-\frac{2(M-m)g}{k}=\frac{2Mg}{k}.$$

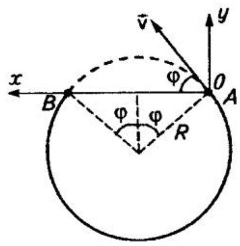
Максимальное смещение из положения равновесия определяется величиной:

$$2(x_0-x')=\frac{2mg}{k}.$$

5.6. Небольшое тело соскальзывает по наклонной плоскости, переходящей в мертвую петлю, в которой вырезана дуга, симметричная относительно вертикального диаметра. Радиус мертвой петли равен 1 м, длина хорды AB равна 1,73 м. Определите высоту H, с которой должно спуститься тело, чтобы из точки A оно попало в точку B, двигаясь по воздуху.



Выберем систему координат, как показано на следующем рисунке.



Запишем кинематический закон движения тела:

$$x = V\cos\varphi \cdot t$$

$$y = V\sin\varphi \cdot t - g\frac{t^2}{2}.$$

Здесь V –скорость тела в момент отрыва от петли. Она направлена по касательной к окружности под углом φ *к горизонту. Этот угол можно найти, зная длину хорды AB:*

$$S = 2R\sin\varphi$$

$$\varphi = \arcsin\frac{S}{2R}.$$

Чтобы попасть в точку B, тело должно проделать по горизонтали путь S, равный длине хорды AB. Таким образом, дальность полета тела по параболе равна S.

Находим дальность полета:

$$S = \frac{2V^2\sin\varphi\cos\varphi}{g}.$$

Приравняв это выражение длине хорды, определим скорость в момент отрыва, при которой тело попадает в точку B:

$$V = \sqrt{\frac{gR}{\cos\varphi}}.$$

Найдем теперь, с какой высоты H должно соскользнуть тело, чтобы в точке A петли иметь нужную скорость. Для этого запишем закон сохранения энергии для тела, приравняв энергию в момент начала соскальзывания с высоты H и в момент отрыва от желоба:

$$mgH = \frac{mV^2}{2} + mg(R + R\cos\varphi).$$

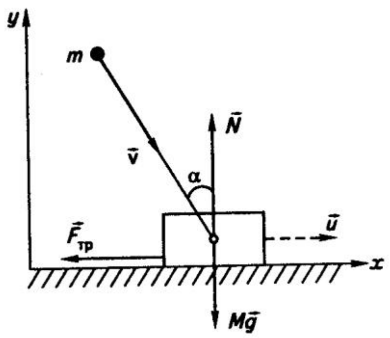
Подстановка скорости в это выражение дает:

$$H = R\left(\frac{1}{2\cos\varphi + \cos\varphi} + 1\right).$$

6. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

6.1. Ящик с песком массой M=10 кг лежит на горизонтальной поверхности, коэффициент трения с которой μ =0,5. Под углом 60^0 к вертикали в ящик со скоростью 600 м/с попадает пуля массой m= 10 г и почти мгновенно застревает в песке. Какую скорость приобретет ящик к моменту окончания движения пули в песке?

Система «пуля-ящик» является замкнутой, т.к. на нее действуют внешние силы в вертикально направлении – сила тяжести и реакция опоры, в горизонтальном направлении сила трения скольжения.



Время движения пули в песке очень мало, однако за это время импульс системы меняется на конечную величину. Это означает, что в течение времени τ внешние силы – реакция опоры и связанная с ней сила трения были очень велики, так что импульсы этих сил $\int_0^\tau \vec{N}dt$ и $\int_0^\tau \vec{F}dt$ имеют конечную величину. Импульсом же силы тяжести можно пренебречь.

Запишем изменение импульса системы за время τ:

$$(M + m)\vec{U} = m\vec{V} = \int_0^\tau (\vec{N} + \vec{F})dt.$$

Найдем проекции этого уравнения на оси координат:

$$(M+m)U - mV\cos\alpha = -\int_0^{\tau} Fdt$$
$$-(mV\sin\alpha) = \int_0^{\tau} Ndt$$
.

Поскольку сила трения скольжения равна $F=\mu N$ *в любой момент времени, то и модули импульсов силы F и N пропорциональны друг другу:*

$$\int_0^{\tau} Fdt = \mu\int_0^{\tau} Ndt.$$

Окончательно можем записать:

$$U = \frac{mV(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{M+m}.$$

6.2. Ракета поддерживается в воздухе на постоянной высоте, выбрасывая вертикально вниз струю газа со скоростью U= 900 м/с. Найдите: а) сколько времени ракета может оставаться в состоянии покоя, если начальная масса топлива составляет η=25% ее массы без топлива; б) какую массу газов $\mu(t)$ должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться на постоянной высоте, если начальная масса ракеты с топливом равна m_0?

Ракета движется под действием силы тяжести и реактивной силы, действующей на нее со стороны струи выбрасываемых газов. Запишем уравнение движения ракеты (уравнение Мещерского):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \mu\vec{U},$$

здесь $\mu = -\dfrac{dm}{dt}$ *скорость расхода газов.*

В проекциях на ось x, направленную вертикально вверх:

$$ma = -mg - \frac{dm}{dt}U.$$

Поскольку в данном случае ракета поддерживается на одной высоте, то:

$$0 = -mg - \frac{dm}{dt}U.$$

Разделяя переменные и интегрирую, получим:

$$\ln\frac{m}{m_0} = -\frac{gt}{U}.$$

Это уравнение связывает массу m ракеты с оставшимся топливом и время работы двигателя. Ракета может оставаться на одной высоте до тех пор, пока не выгорит все топливо. Так как начальная масса топлива составляет 26% массы самой ракеты m_p, *то* $m_0 = m_p(1+\eta)$. *Можем найти искомое время:*

$$t = \frac{U}{g}\ln(m_0/m_p) = \frac{U}{g}\ln(1+\eta).$$

Чтобы рассчитать необходимый для поддержания равновесия расход *топлива используем уравнение:*

$$m = m_0 \exp(-\frac{gt}{U}).$$

Находим расход топлива:

$$\mu = -\frac{dm}{dt} - \frac{g}{U} m_0 e^{-gt/U}.$$

7. СОУДАРЕНИЯ ТЕЛ

7.1. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули m_1=5 г, масса шара m_2=0.5 кг. Скорость пули V_1 =500 м/с. 1) При каком максимальном расстоянии *l* от центра шара до точки подвеса стержня шар от удара пули поднимется до верхней точки окружности? 2) Как изменится ответ, если стержень заменить нитью?

Взаимодействие пули с маятником является неупругим соударением, т.к. после взаимодействия два тела движутся как одно. При неупругом соударении сохраняется импульс системы «пуля-шар» в проекции на горизонтальное направление. Однако механическая энергия при этом взаимодействии не сохраняется так как между пулей и шаром действует сила трения.

Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление движения пули:

$$m_1V_1 = (m_1+m_2)U.$$

U –скорость шара с пулей сразу же после столкновения.

Отсюда находим:

$$U = \frac{mV}{m_1 + m_2}.$$

Дальнейшее движение маятника с застрявшей в нем пулей происходит под действием силы тяжести и силу упругости стержня. При этом уже сохраняется механическая энергия системы. По условию задачи маятник делает полный оборот. Приравняем механическую энергию маятника в верхней и нижней точках его траектории:

$$\frac{MU^2}{2} = 2Mgl + E_k.$$

E_k- кинетическая энергия маятника в верхней точке.

1. Если маятник висит на стрежне, то его минимальная кинетическая энергия в верхней точке равна нулю. Поэтому максимальная длина стержня, удовлетворяющая закону сохранения энергии, будет равна:

$$l = \frac{U^2}{4g} = \frac{1}{4g}\left(\frac{m_1V}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

2. Если же маятник висит на нити, его минимальная кинетическая энергия в верхней точке отлична от нуля. Запишем уравнение движения шарика по окружности:

$$\frac{MU'^2}{2} = Mg + N .$$

N- сила натяжения нити.

Так как $N \geq 0$, минимальная скорость U' маятника в верхней точке равна $U' = \sqrt{gl}$, а минимальная кинетическая энергия в верхней точке $E_k = \frac{1}{2}Mgl$.

Поэтому можем теперь записать:

$$l = \frac{U^2}{5g} = \frac{1}{5g}\left(\frac{m_1 V}{m_1 + m_2}\right)^2 .$$

7.2. Два стальных шара подвешены на нитях так, что при их касании центры тяжести находятся на l =1м ниже точки подвеса, а нити вертикальны. Массы их m_1 =800 г и m_2 =200 г. Более легкий шар отводят в сторону на α =90^0 и отпускают. Принимая шары за абсолютно упругие, определите: а) на какую высоту поднимется центр каждого из шаров; б) при каком соотношении между массами шаров высоты подъема будут одинаковы.

Найдем скорость V_2 меньшего шара непосредственно перед ударом с помощью закона сохранения энергии:

$$m_2 gl(1 - \cos\alpha) = \frac{m_2 V_2^2}{2} .$$

Отсюда следует:

$$V_2 = \sqrt{2g(1 - \cos\alpha)} .$$

Скорости шаров после упругого удара определяются по известным формулам:

$$V_1' = \frac{2m_2 V_2}{m_1 + m_2} ,$$

$$V_2' = -\frac{(m_1 - m_2)V_2}{m_1 + m_2} .$$

Мы видим, что $V_1' > 0$, т.е. покоившийся тяжелый шар начнет после удара двигаться в сторону движения налетевшего шара, а налетевший шар после удара начнет двигаться в противоположную сторону.

Высоты h_1 и h_2 поднятия шаров после удара найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{m_1 V_1'^2}{2} = m_1 g h_1$$

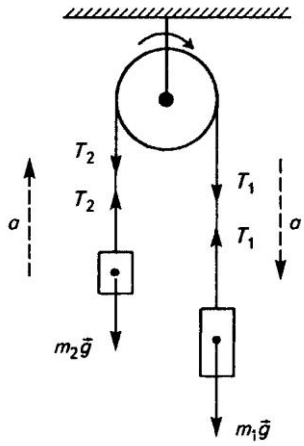
$$h_1 = \frac{V_1'^2}{2g} = \left(\frac{2m_2}{m_2 + m_1}\right)^2 l(1 - \cos\alpha) .$$

$$\frac{m_2 V_2'^2}{2} = m_2 g h_2$$

$$h_2 = \frac{V_2'^{\,2}}{2g} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1}\right)^2 l(1-\cos\alpha)\,.$$

8.ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

8.1. Определите ускорения грузов и силы натяжения нити на машине Атвуда, если известно, что массы грузов m_1 и m_2. Блок представляет собой однородный сплошной цилиндр массой m.



Сила натяжения нити слева и справа от блока теперь будет разная. Эта разность сил создает результирующий момент сил, вращающих блок с угловым ускорением β. Запишем уравнение движения грузов и блока:

$$m_1 a = m_1 g - T_1$$
$$m_2 a = T_2 - m_2 g \quad .$$
$$(T_1 - T_2)R = I\beta$$

Здесь $I = mR^2/2$ *-момент инерции блока-цилиндра.*
Поскольку проскальзывания нити по блоку нет, линейное ускорение грузов равно линейному ускорению точек на ободе блока. Между угловым и линейным ускорением точек обода есть кинематическая связь:

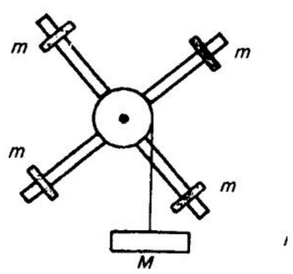
$$a = \beta R\,.$$

Окончательно можно получить:

$$a = \frac{(m_1 - m_2 g}{m_1 + m_2 + {}^{m}\!/_{2}}, \quad T_1 = \frac{m_1(2m_2 + m/2)g}{m_1 + m_2 + m/2},$$

$$T_2 = \frac{m_2(2m_{21} + m/2)g}{m_1 + m_2 + m/2}, \qquad .$$

8.2. Тело приводят во вращение вокруг горизонтальной оси с помощью падающего груза, привязанного к шнуру. Шнур намотан на вал радиусом R=002 м. Груз массой m=0,4 кг опускается за время t= 5 с на расстояние h_1 = 1,2 м, а затем вследствие вращения тела поднимается на высоту h_2 =0.8 м. Определите момент инерции тела и момент тормозящих сил M_τ, действующих в оси.



Уравнения движения груза и вращающегося тела при спуске имеют вид:

$$mg - T_1 = ma_1$$
$$T_1R - M_\tau = Ia_1 / R \cdot$$

Мы учли связь между угловым и линейным ускорениями. Из кинематических данных задачи следует, что:

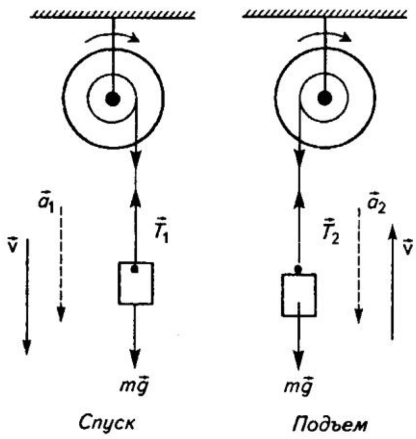
$$a_1 = 2h_1 / R.$$

Уравнения движения при подъеме:

$$mg - T_2 = ma_2$$
$$-T_2R - M_\tau = -Ia_{12} / R \cdot$$

Ускорение при подъеме направлено вниз, поскольку груз поднимается равнозамедленно. Момент сил рения сохраняет тот же знак, так как направление вращения не изменилось; угловое же ускорение стало отрицательным. Величину этого ускорения определим по кинематическим данным. Для этого сначала найдем конечную скорость при спуске $V = a_1 t = 2h_1 / t$. *С такой же по величине скоростью груз начнет подниматься после остановки в нижней точке. Так как* *известно, что груз поднялся на высоту* h2, *то получаем :*

$$a_2 = \frac{V^2}{2h_2} = \frac{a_1 h_1}{h_2}.$$



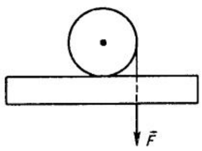
В системе уравнений осталось четыре неизвестных, решив ее, находим:

$$I = \frac{mR^2(2g - a_1 - a_2)}{a_1 + a_2}$$

$$M_\tau = mgR\left(1 - \frac{2h_2}{h_1 + h_2}\right).$$

8. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

8.1. Однородный сплошной цилиндр массой m лежит на двух горизонтальных брусьях. На цилиндр намотана нить, за свешивающийся конец которой тянут с постоянной силой F вертикально вниз. При каких значениях F цилиндр будет катиться без скольжения, если коэффициент трения равен μ?



Запишем уравнение поступательного движения цилиндра в горизонтальном направлении:

$$F_{тр} = ma,$$

Заметим, что единственной силой движущей цилиндр в горизонтальном направлении может быть сила трения покоя. В критическом случае (начло скольжения) она равна $F_{тр} = \mu N = \mu(mg + N)$.

Запишем уравнение вращательного движения цилиндра вокруг сои, проходящей через его центр масс:

$$I\frac{a}{R} = (F - F_{тр})R.$$

Здесь $I=mR^2/2$ –момент инерции цилиндра.
Решив эту систему уравнений, получим искомый ответ.

8.2. Определите кинетическую энергию шара массой m при качении без проскальзывания со скоростью V по плоской поверхности.
Кинетическая энергия твердого тела при качении складывается из энергии вращения в системе центра масс и энергии поступательного движения тела как целого.

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mV^2}{2}.$$

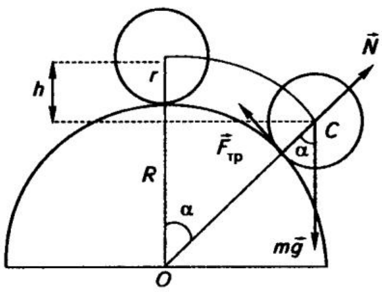
При отсутствии проскальзывания $V = \omega R$ *, поэтому:*

$$E = \frac{I(V/R)^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = \frac{mV^2}{2}\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right).$$

Для шара $I = \frac{2}{5}mR^2$*, тогда:*

$$E = \frac{7}{10}mV^2.$$

8.3. Однородный шар радиусом r начинает скатываться без начальной скорости с вершины полусферы радиусом R. При каком угле α_0 между вертикалью и прямой, соединяющей центры тяжести полусферы и шара, начнется проскальзывания, если коэффициент трения скольжения μ =0,1?



В процессе скатывания с полусферы на шар действуют три силы: тяжести, реакции опоры и сила трения. В момент отрыва реакция опоры обращается в нуль.

Поскольку при скатывании центр масс шара движется по окружности радиусом (r+R), его ускорение содержит центростремительную составляющую, и уравнение его движения в проекции на радиальное направление OC в момент отрыва будет иметь вид:

$$\frac{mV^2}{r+R} = mg\cos\alpha \ .$$

Скорость V найдем из закона сохранения механической энергии (сила трения покоя работы не совершает):

$$mgh = 0{,}7mV^2 .$$

Как видно из рисунка:

$$h = (R + r)(1 - \cos\alpha) .$$

Из этих трех уравнений получаем:

$$V = \sqrt{\frac{10(R + r)g}{17}} .$$

Из этих же уравнений следует, что отрыв произойдет при:

$$\alpha_0 = arctg\frac{10}{17} = 54^0 .$$