МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Шубарин М. А.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Линейная алгебра
Векторные пространства

для студентов Экономического факультета ЮФУ

Ростов-на-Дону
2016

Методическое пособие разработано доцентом кафедры математического анализа М. А. Шубариным,

Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук Ю. С. Налбандян (ЮФУ)

Печатается в соответствии с решением кафедры математического анализа факультета математики, механики и компьютерных наук ЮФУ, протокол № 1 от 5 сентября 2016.

Рекомендовано учебно-методическим советом экономического факультета (протокол №1 от 9 сентября 2016 года) для передачи и хранения в банке компьютерных изданий ЮФУ.

Содержание

1 Матрицы **4**

1.1 Определение и примеры матриц 4

1.2 Операции с матрицами 6

1.3 Определитель матрицы 2×2, 3×3 11

1.4 Определитель произвольной квадратной матрицы 13

1.5 Обратная матрица 20

2 Системы алгебраических уравнений **25**

2.1 Определение. Типы разрешимости 25

2.2 Метод Гаусса 27

2.3 Системы уравнений с квадратной матрицей 33

3 Модель "Затраты–выпуск" В. В. Леонтьева **36**

4 Векторные пространства **40**

4.1 Определение, примеры 40

4.2 Линейная независимость 42

4.3 Базисы системы векторов 43

4.4 Базисы векторных пространств 46

4.5 Общий вид решения однородной и неоднородной системы . . 46

4.6 Ранг систем векторов и матрицы 52

4.7 Скалярное произведение. Метрика. Норма. 54

4.8 Ортогональность. 56

4.9 Ортонормированные базисы 57

5 Задачи **61**

5.1 Определители 61

5.2 Операции с матрицами 63

5.3 Системы линейных уравнений 67

5.4 Векторные базисы 68

6 Рекомендуемая литература **70**

1 Матрицы

1.1 Определение и примеры матриц

Прямоугольную таблицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называют матрицей (точнее, матрицей размера $m \times n$ или $m \times n$–матрицей).

Число строк в этой матрице равно m, а число столбцов — n. В дальнейшем матрицы будут обозначаться прописными буквами. Например,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для упрощения записи будем применять сокращённое обозначение матрицы $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n} = (a_{ij})$. Числа (вещественные или комплексные) a_{ij} называют элементами матрицы A, а числа (a_{ii}) — её диагональными элементами. На пересечении строки с номером $i = 1, \dots, m$ и столбца с номером $j = 1, \dots, n$ находится элемент матрицы a_{ii} В дальнейшем будут рассматриваться матрицы только с вещественными коэффициентами. Иногда для матриц применяется другое обозначение — используются не круглые скобки (a_{ij}), а скобки вида $[a_{ij}]$ или $\|a_{ij}\|$ (например, в примерах на стр. 32 и 35).

Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{lk} \end{pmatrix}$$

называют равными и пишут $A = B$, если $n = k$, $m = l$ и $a_{ij} = b_{ij}$ для произвольных $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$.

Пример 1.1.0. *Если $n = 1$, то матрицу*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

называют столбцом (m–мерным столбцом). Если $m = 1$, то матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \end{pmatrix}$$

называют называют строкой (n–мерной строкой). Произвольную матрицу можно рассматривать составленной из строк и столбцов. Например, в матрице A выделена s-ая строка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a_{s1}} & \mathbf{a_{s2}} & \ldots & \mathbf{a_{sn}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

выделен s-ая строка, которую обозначим через A_s, а в матрице

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & \mathbf{b_{1r}} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & \mathbf{b_{2r}} & \ldots & a_{bn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & \mathbf{b_{mr}} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

выделен r-ый столбец, который обозначим через B^r. ♠

Пример 1.1.1. Если $n = m$, то матрицу размера $n \times n$ называют квадратной.

Квадратную матрицу называют диагональной, если она имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

называют верхней треугольной матрицей, а матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{13} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

нижней треугольной матрицей. Очевидно, что диагональные матрицы будут одновременно верхними и нижними треугольными матрицами. ♠

Пример 1.1.2. *Матрица (размера $m \times n$)*

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

называется нулевой. ♠

1.2 Операции с матрицами

Транспонирование. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицу

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(которая получается из матрицы A заменой строк на соответствующие столбцы) называют транспонированной к матрице A и обозначают через A^T.

Пример 1.2.0. *Если*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$

то

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

♠

Противоположная матрица. Матрица (обозначаемая через $-A$), противоположная к матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

определяется равенством

$$-A := \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сумма матриц. Пусть даны две матрицы $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}$, $B = (b_{ij})_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}$ одинакового размера.

Определение 1.2.1 *Сумма матриц A и B (которую обозначают через $A+B$) определяется равенством*

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, матрицу $A - B := A + (-B)$ называют разностью матриц A и B.

Пример 1.2.1. *Из определения суммы матриц следует, что*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

♠

Произведение числа и матрицы. Пусть даны число t и матрица $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}$.

Определение 1.2.2 *Если t — число, то произведением числа t и матрицы A называют матрицу tA, определяемую равенством*

$$tA = \begin{pmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \dots & ta_{1n} \\ ta_{21} & ta_{22} & \dots & ta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ta_{m1} & ta_{m2} & \dots & ta_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример 1.2.2. *Из определения произведения числа и матрицы следует, что*

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 6 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

♠

Пример 1.2.3. *Пусть даны матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите $2A + 3B$.

Из определений 1.2.1 и 1.2.2 следует, что

$$2A + 3B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 9 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

♠

Лемма 1.2.1 *Для произвольных матриц одинакового размера A, B и числа t справедливы следующие равенства:*

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(tA)^T = tA^T$;
3. $(A^T)^T = A$;
4. *матрица, транспонированная к верхней (соответственно, нижней) треугольной матрице буде нижней (соответственно, верхней) треугольной матрицей;*
5. *матрица, транспонированная к диагональной матрице, будет диагональной матрицей.*

Лемма 1.2.2 *Для произвольных матриц одинакового размера A, B, C и чисел λ, μ справедливы следующие равенства:*

1. $A+B=B+A$ (*коммутативное свойство*),

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (*ассоциативное свойство*)

3. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$,

4. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,

5. $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)$.

Свойства 3–4 называют дистрибутивными.

Лемма 1.2.3 *Для любой матрицы A существует единственная матрица (такого же размера) B (которую совпадает с $-A$) такая, что $A+B=B+A=0$. Для произвольной матриц A справедливы следующие равенства:*

1. $-A=(-1)A$,

2. $A+0=A$ (*где* 0 — *нулевая матрица того же размера, что и матрица* A).

Лемма 1.2.4 *Матричное уравнение $A+X=B$ (из которого следует определить матрицу X) имеет единственное решение $X=B-A$.*

Пример 1.2.4. Решите матричное уравнение $\lambda X+A=B$, если $\lambda\neq 0$.

Делаем последовательные равносильные преобразования:

1. $\lambda X+A=B$,

2. $(\lambda X+A)+(-A)=\lambda X+(A+(-A))=B+(-A)$,

3. $\lambda X=B-A$,

4. $X=\dfrac{1}{\lambda}\lambda X=\dfrac{1}{\lambda}(B-A)$.

Таким образом найдено единственное решение рассматриваемого уравнения. ♠

Умножение матриц. Пусть даны матрица A (размера $m\times l$) и B (размера $l\times n$):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{il}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ml}\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & \mathbf{b_{2j}} & \dots & b_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{l1} & b_{l2} & \dots & \mathbf{b_{lj}} & \dots & b_{lm}\end{pmatrix}$$

Определение 1.2.3 *Произведением матриц A и B (которое обозначают через AB) называют матрицу $C = (c_{ij})$ (размера $m \times n$), элементы которой определяются следующим образом:*

$$c_{i,j} = a_{i1}b_{1,j} + \dots + a_{il}b_{lj} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$$

Пример 1.2.5. *Пусть даны две диагональные матрицы одинакового размера*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Тогда (проверьте это равенство самостоятельно)

$$AB = BA = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

♠

Пример 1.2.6. *Пусть даны матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вычислим AB. Из определения 1.2.3 следует, что

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + (-2) \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + (-2) \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ (-4) \cdot 7 + 5 \cdot 9 + (-6) \cdot 11 & (-4) \cdot 8 + 5 \cdot 10 + (-6) \cdot 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 24 \\ -49 & -54 \end{pmatrix}.$$

♠

Лемма 1.2.5 *Предположим, что матрицы A, B, C такие, что определены все произведения из равенств 1–3 данного утверждения. Тогда справедливы следующие равенства:*

1. *$(AB)C = A(BC)$ (ассоциативное свойство)*

2. *$(A+B)C = AC + BC$,*

3. *$C(A+B) = CA + CB$,*

4. *$E'A = AE'' = A$ (где E', E'' — единичные такого размера, что определены произведения $E'A$ и AE''),*

5. *$0A = 0$, $A0 = 0$ (где 0 — нулевые матрицы для которых определены произведения $0A$ и $A0$)*

6. *$(AB)^T = B^T A^T$*

Свойства 2–3 называют дистрибутивными.

Замечание. *В общем случае операция произведения AB и BA могут быть не определены одновременно. Например, если матрица A и B имеют соответственно размер 2×3 и 3×4 то произведение AB определено, а произведение BA — нет.*
Замечание. *В общем случае операция произведения двух матриц не коммутативно. Точнее, если произведение матриц AB, AB определено, то матрицы AB и BA не обязательно равны. Пусть, например,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq AB.$$

1.3 Определитель матрицы 2×2, 3×3

1. Пусть дана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Определение 1.3.1 *размера 2×2. Определителем этой матрицы называется число*

$$\det(A) = |A| := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При вычислении определителя матрицы размера 2×2 можно использовать следующую символьную формулу

$$|A| = \begin{pmatrix} * & \cdot \\ \cdot & * \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & * \\ * & \cdot \end{pmatrix}$$

Знаком "звёздочка" обозначены элементы матрицы, которые следует перемножить.

Пример 1.3.0. *Вычислите определитель матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

Из определения 1.3.1 определителя матрицы размерв 2×2 следует, что

$$|A| = 10 \cdot 13 - 11 \cdot 12 = 130 - 132 = -2.$$

♠

2. Пусть дана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

размера 3×3.

Определение 1.3.2 *Определителем этой матрицы называется число*

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| := \ & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & -a_{13}a_{21}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

При вычислении определителя матрицы размера 3×3 можно использовать следующую символьную формулу

$$\begin{aligned} \det(A) = & \begin{pmatrix} * & \cdot & \cdot \\ \cdot & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & * \\ * & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & * \\ * & \cdot & \cdot \\ \cdot & * & \cdot \end{pmatrix} - \\ & - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & * \\ \cdot & * & \cdot \\ * & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & * & \cdot \\ * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & * \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & * \\ \cdot & * & \cdot \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Знаком "звёздочка" обозначены элементы матрицы, которые следует перемножить.

Пример 1.3.1. *Вычислите определитель матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}.$$

Из определения 1.3.2 следует, что

$$\begin{aligned} |A| = \ & 1 \cdot 9 \cdot 17 + 5 \cdot 7 \cdot 15 + 3 \cdot 11 \cdot 13 - \\ & 5 \cdot 9 \cdot 13 - 3 \cdot 7 \cdot 17 - 1 \cdot 11 \cdot 15 = \\ & -153 + 525 + 429 - 585 - 357 - 165 = -380. \end{aligned}$$

♠

1.4 Определитель произвольной квадратной матрицы

1. Пусть дана произвольная квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы A называют число $\det(A) = |A|$, которое вычисляется после неоднократных применений следующих правил.

Правило 1. Если A — диагональная матрица, то

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n;$$

Пример 1.4.0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1111 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot 1111 = 1356531$$

♠

Правило 2. Общий множитель элементов любой строки или столбца можно "вынести" за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{ta_{k1}} & \mathbf{ta_{k2}} & \dots & \mathbf{ta_{kn}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & \dots & \mathbf{a_{kn}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \mathbf{ta_{1k}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \mathbf{ta_{2k}} & \dots & ta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & \dots & \mathbf{ta_{nk}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \mathbf{a_{1k}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \mathbf{a_{2k}} & \dots & ta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & \dots & \mathbf{a_{nk}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример 1.4.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 & 4 \\ 5 & 30 & 7 & 8 \\ 90 & 200 & 110 & 120 \\ 13 & 120 & 15 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 & 4 \\ 5 & 30 & 7 & 8 \\ 9 \cdot 10 & 20 \cdot 10 & 11 \cdot 10 & 12 \cdot 10 \\ 13 & 120 & 15 & 15 \end{vmatrix} \overset{[1]}{=}$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 \cdot 5 & 3 & 4 \\ 5 & 6 \cdot 5 & 7 & 8 \\ 9 & 4 \cdot 5 & 11 & 12 \\ 13 & 14 \cdot 5 & 15 & 15 \end{vmatrix} \overset{[2]}{=} 50 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 4 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 15 \end{vmatrix}.$$

Замечание.

1. *из элементов третьей строки вынесли за знак определителя общий множитель* 10*;*

2. *из элементов второго столбца вынесли за знак определителя общий множитель* 5*;*

♠

Правило 3. Определитель матрицы не изменится, если к одной строке матрицы прибавить другую (аналогично, если к одному столбцу матрицы прибавить другой столбец), умноженную на число.

Если $1 \leqslant k < r \leqslant n$ и t — число, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & \dots & \mathbf{a_{kn}} \\ . & . & . & . \\ \mathbf{a_{r1}} & \mathbf{a_{r2}} & \dots & \mathbf{a_{rn}} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & \dots & \mathbf{a_{kn}} \\ . & . & . & . \\ \mathbf{a_{r1}} + \mathbf{ta_{k1}} & \mathbf{a_{r2}} + \mathbf{ta_{k2}} & \dots & \mathbf{a_{rn}} + \mathbf{ta_{kn}} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \mathbf{a_{1k}} & \dots & \mathbf{a_{1r}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \mathbf{a_{2k}} & \dots & \mathbf{a_{2r}} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & \mathbf{a_{nk}} & \dots & \mathbf{a_{nr}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \mathbf{a_{1k}} & \dots & \mathbf{a_{1k}} + \mathbf{ta_{1r}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \mathbf{a_{2k}} & \dots & \mathbf{a_{2k}} + \mathbf{ta_{2r}} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & \mathbf{a_{2k}} & \dots & \mathbf{a_{nk}} + \mathbf{ta_{nr}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

К строке (столбцу) матрицы можно прибавлять несколько других её строк (столбцов), без изменения её определителя.

Пример 1.4.2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0+1 & 0+2 & 0+0 & 0+0 \\ 0 & 2 & 0 & 0+0 \\ 0 & 0 & 3 & 0+3 \\ 1 & 0 & 0 & 0+4 \end{vmatrix} \overset{[1]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24.$$

Замечание.

1. *сначала вычли из первой строки вычли вторую строку, а затем из четвёртого столбца вычли третий столбец.*

♠

Правило 4. Знак определителя матрицы поменяется на противоположный, если в ней поменять местами две различные строки (или два различных столбца). Если $1 \leqslant k < r \leqslant n$, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & \dots & \mathbf{a_{kn}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a_{r1}} & \mathbf{a_{r2}} & \dots & \mathbf{a_{rn}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a_{r1}} & \mathbf{a_{r2}} & \dots & \mathbf{a_{rn}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & \dots & \mathbf{a_{kn}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \mathbf{a_{1k}} & \dots & \mathbf{a_{1r}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \mathbf{a_{2k}} & \dots & \mathbf{a_{2r}} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & \mathbf{a_{nk}} & \dots & \mathbf{a_{nr}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \mathbf{a_{1r}} & \dots & \mathbf{a_{1k}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \mathbf{a_{2r}} & \dots & \mathbf{a_{2k}} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & \mathbf{a_{nr}} & \dots & \mathbf{a_{nk}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример 1.4.3.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{[1]}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{[2]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{[3]}{=}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{[4]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{[5]}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

1 переставили первую и вторую строки,

2 переставили четвёртый и второй столбец

3 переставили четвёртую и пятую строки,

4 переставили третий и четвёртый столбец, *5 матрица приведена к диагональному виду и к ней пременено первое правило.*

♠

Правило 5. Если матрица A^T — транспонированная к матрице A, то $|A| = |A^T|$.

Пример 1.4.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

♠

2. Из приведённого в п.1 раздела 1.4"определения" определителя матрицы следует ряд свойств, позволяющих упростить его вычисление.

Теорема 1.4.1 *Определитель верхней (нижней треугольной) матрицы равен произведению её диагональных элементов:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{13} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Теорема 1.4.2 *Если в квадратной матрице существует строка (столбец), состоящий только из нулей, то определитель этой матрицы равен нулю. Если в квадратной матрице существует две одинаковых строки (два одинаковых столбца), то определитель этой матрицы равен нулю.*

Пусть $1 \leqslant r < s \leqslant n$. Строки A_r и A_s матрицы A называют пропорциональными, если $a_{r1} = ta_{s1}$, $a_{r2} = ta_{s2}$, $\dots$, $a_{rn} = ta_{sn}$. Аналогично апределяются пропорциональность столбцов матрицы.

Теорема 1.4.3 *Если в квадратной матрице существуют пропорциональные строки (столбцы), то определитель этой матрицы равен нулю.*

Равносильными преобразованиями квадратной матрицы называют следующие преобразования:

1. перестановка строк,
2. замена i – ой строки матрицы на сумму i – ой и j – ой строки матрицы, умноженной на число,
3. транспонирование.

Аналогичным образом можно преобразовывать и столбцы матрицы. Если даны квадратные матрицы A и B такие, что A получается из B с помощью равносильных преобразований строк и столбцов, то $|A| = \pm|B|$. Если количество сделанных перестанок чётно, то $|A| = |B|$. Если количество перестановок нечётно, то $|A| = -|B|$.

Пример 1.4.5. *Неоднократное равносильных можно преобразовать произвольную матрицу в верхнюю треугольную, не изменив при этом её определитель. Вычислим таким образом определитель матрицы*

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Имеется цепочка равенств:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \overset{\boxed{1}}{=} \begin{pmatrix} 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \overset{\boxed{2}}{=}$$

$$= 15 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \overset{\boxed{3}}{=} 15 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 15 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 15.$$

Замечание.

1. *к первой строке прибавили остальные;*

2. *из элементов первой строки общий множитель 15 вынесли за знак определителя;*

3. *Первую стоку, умноженную на 4, вычли последовательно из всех остальных строк.*

♠

3. В некоторых случаях определитель матрицы может вычисляться путём понижения её размер. Обозначим через M_{j_0,k_0} определитель матрицы, которая получается из данной матрицы после вычёркивания j_0-ой строки и k_0-столбца. Число M_{j_0,k_0} называют минором элемента матрицы $a_{j_0k_0}$.

Теорема 1.4.4 *Предположим, что квадратная матрица $A = (a_{ij})$ удовлетворяет следующему условию: существует числа j_0, k_0, лежащие между 1 и n и такие, что $a_{j_0k_0}$ — единственный ненулевой элемент в j_0-ой строке (или k_0-ом столбце). Тогда*

$$|A| = (-1)^{j_0+k_0} a_{j_0k_0} M_{j_0,k_0}.$$

Теорема 1.4.5 *Если $j_0 = 1, \ldots, n$ или $k_0 = 1, \ldots, n$. Тогда*

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} M_{j,k}, \tag{1}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} M_{j,k}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) называют соответственно разложениями определетеля матрицы A по j-ой строке или по k-му столбцу.

Пример 1.4.6.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} \overset{[j_0=1,k_0=1]}{=} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} \overset{[j_0=1,k_0=1]}{=}$$

$$(-1)^{1+1} 3 \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} \overset{[j_0=2,k_0=1]}{=} (-1)^{2+1} 3 \cdot 8 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -24(9 \cdot 5 - 1 \cdot 8) = -888$$

♠

Пример 1.4.7. *Вычислите определитель матрицы*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Из теоремы 1.4.5 следует, что

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 24 + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot (-12) +$$

$$+3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 8 + 4 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 12 = 24.$$

♠

1.5 Обратная матрица

1. Пусть дана квадратная матрица A (размера $n \times n$).

Определение 1.5.1 *Квадратную матрицу B (размера $n \times n$) называют обратной к матрице A (и обозначают через A^{-1}), если $AB = BA = E$. Матрицу, для которой существует обратная, называют обратимой. Все остальные матрицы называют необратимыми*

Лемма 1.5.1 *Пусть A — обратимая матрица. Матричные уравнения $AX = B$, $XA = C$ (из которого следует определить матрицу X) имеют единственное решение: соответственно $X = A^{-1}B$ и $X = CA^{-1}$.*

Теорема 1.5.1 *Пусть A, B — обратимые матрица одинакового размера. Тогда матрица AB обратима и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Пример 1.5.0. *Диагональная матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

обратима тогда и только тогда когда все её диагональные элементы не равны нулю. В это случае

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

♠

Пример 1.5.1. *Покажем, что не всякая ненулевая матрица обратима. Для этого покажем, что матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

необратима. Действительно, для произвольной 2×2*–матрицы* $B = (b_{i,j})$ *имеет место равенство*

$$AB = \begin{pmatrix} b_{1,1} + b_{2,1} & b_{1,2} + b_{2,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Необратимость матрицы A *вытекает из того, что* $|A| = 0$ *и из следующего утверждения*

Лемма 1.5.2 *Если* C, D *— квадратные матрицы и определено их произведение* CD, *то* $|CD| = |C| \cdot |D|$

Предположим, что матрица A *обратима и* A^{-1} *— матрица, обратная к ней. Тогда из леммы 1.5.2 и правила 1 вычисления определителя матрицы (это правило находится на стр. 13) получается противоречие:*

$$1 = |E| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 0.$$

♠

2. Сформулируем общий критерий обратимости матрицы, следствим которого является возможность сведения задачи вычисления обратной к невырожденной матрицы размера $n \times n$ к вычислению n^2 определителей матриц размера $(n-1) \times (n-1)$.

Теорема 1.5.2 *Квадратная матрица* A *обратима тогда и только тогда, когда* $|A| \neq 0$.

Матрицы с ненулевым определителем называются невырождеными. В противном случае квадратная матрица называется вырожденой.

Определение 1.5.2 *Пусть* $A = (a_{j,k})_{j,k=1,\dots,n}$. *Алгебраическим дополнением элемента матрицы* $a_{j,k}$ *называют число* $A_{j,k} := (-1)^{j+k} M_{j,k}$.

В общем случае имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.5.3 *Если* A *— невырожденная матрица, то*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}((A_{j,k})_{j,k=1,\dots,n})^T.$$

Пример 1.5.2. *Найдём обратную матрицу для матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Обратимость матрицы A *следует из того, что* $|A| = 24 \neq 0$. *Вычислим* *алгебраические дополнения всех элементов матрицы:*

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24, \quad A_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{1,3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{1,4} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{2,1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -24, \quad A_{2,2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_{3,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{4,2} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{1,3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12,$$

$$A_{3,3} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{4,3} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{1,4} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{2,4} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{3,4} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{4,4} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 6 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 24 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

♠

3. В качестве одного из возможных приложений обратных матриц рассмотрим решение матричных уравнений.

Пример 1.5.3. *Решите относительно X матричные уравнения $AX = C$*

и $AX + B = C$, *в которых*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Из теорем 1.5.2–1.5.3 следует, что матрица A *обратима и*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Решим первое уравнение. Из леммы 1.5.1 следут, что это уравнение имеет единственное решение

$$X = A^{-1}C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для решения второго уравнения следует заметить, что оно равносильно уравнению

$$AX = C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, единственным решением второго уравнения является матрица

$$X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

♠

2 Системы алгебраических уравнений

2.1 Определение. Типы разрешимости

1. Системой линейных уравнений относительно неизвестных $x_0, \ldots, x_n$ называют выражение вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{3}$$

в котором a_{jk} — числа.

Набор чисел $X_1, \ldots, X_n$ называется решением системы (3), если каждое уравнение системы переходит в верное равенство после подстановки $x_1 = X_1, \ldots, x_n = X_n$.

Система (3) называется совместной, если она имеет решение. В противном случае её называют несовместной. Например, если система уравнений содержит уравнение вида $0 = b$ (в котором $b \neq 0$), то эта система несовместная.

Совместная система называется определённой, если она имеет единственное решение. В противном случае систему называют неопределённой.

Две системы линейных уравнений относительно одних и тех же неизвестных называются равносильными, если всякое решение одной из них является решением и другой системы.

Пусть $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$ матрица системы размера $m \times n$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ — вектор–столбец правых частей системы. Система уравнений (записанная в матричной форме) $Ax = 0$ называется однородной. Любая система $Ax = b$ (при $b \neq 0$) называется неоднородной.

Пример 2.1.0. *Система*

$$\left\{\begin{array}{cccc} & 2x_2 & = & 1 \\ -3x_1 & & = & 5 \end{array}\right.$$

имеет единственное решение $X_1 = -\dfrac{5}{3}$, $X_2 = \dfrac{1}{2}$. *Поэтому эта система определённая.* ♠

Пример 2.1.1. *Произвольное решение системы (состоящей из одного уравнения)*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & - & 3x_2 & = & 4 \end{array}\right.$$

можно найти из соотношений

$$X_1 = 3X_2 + 4, X_2 \text{ — произвольное число.}$$

Следовательно данная система имеет бесконечно много решений и она является неопределённой. ♠

2. Пусть дана система линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & . & . \\ a_{m1}x_m & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{4}$$

Матрицы (размера $m \times n$ и $m \times (n+1)$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \left(A \,\middle|\, b \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называют матрицей системы и расширенной матрицей системы.

Вектор–столбцы

$$x = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^T, b = (b_1\ b_2\ \ldots\ b_m)^T$$

называют соответственно вектор-столбцом неизвестных и вектор-столбцом свободных членов.

Лемма 2.1.1 *Система линейных уравнений (3) равносильна матричному уравнению $Ax = b$.*

Лемма 2.1.2 *Система линейных уравнений (3) равносильна уравнению:*

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = b$$

3. Пусть дана система уравнений (3).

Переменную x_{j_0} называют разрешённой, если среди коэффициентов a_{k,j_0}, $k = 1, \ldots, m$ есть только один ненулевой.

Уравнение с номером $k_0 = 1, \ldots, m$ в системе (3) называют разрешённым (а систему — разрешённой относительно x_{j_0}), если a_{k_0,j_0} — единственный ненулевой элемент в j_0–столбце. В частности это означает, что система разрешена относительно x_{j_0}.

Систему (3) называют разрешённой, если если все входящие в неё уравнения являются разрешёнными. В противном случае её называют неразрешённой. Если система уже разрешённая, то все переменные, не являющиеся разрешёнными, будем называть свободными.

Пример 2.1.2. *Рассмотрим системы, задаваемые следующими расширенными матрицами систем:*

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right),$$
$$C = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right), \quad D = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right).$$

Система, задаваемая матрицей A, неразрешённая. Система, задаваемая матрицей B, разрешена относительно x_1. Система, задаваемая матрицей C, разрешённая — первое уравнение разрешено относительно x_1, второе — относительно x_3. Рассмотрим систему, определяемую матрицей D. Она тоже является разрешённой. Для этой системы можно считать, что

i. *переменные x_1, x_3 — разрешённые переменные, x_2, x_4 — свободные,*

ii. *переменные x_1, x_4 — разрешённые переменные, x_2, x_3 — свободные.*

♠

Общим решением системы линейных уравнений называют вектор – столбец $(X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$, в котором

1. свободные переменные принимают произвольные значения,

2. разрешённые переменные, которые выражаются через свободные

Частное решение системы уравнений получается из общего, если в нём фиксировать значения всех свободных переменных.

Пример 2.1.3. *Пусть дана система уравнений*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 3x_2 & = & 4 \end{array} \right.$$

Тогда общее решение этой системы имеет вид $(3X_2 + 4, X_2)^T$. Вектор-столбцы $(4, 0)^T$ и $(7, 1)^T$ будут частыми решениями этой системы, которые получаются при $X_2 = 0$ и $X_2 = 1$ соответственно. ♠

2.2 Метод Гаусса

1. Следующие преобразования системы (расширенной матрицы системы $(A|b)$) — равносильные:

1. вычёркивание из системы тривиального уравнения вида $0 = 0$ (вычёркивание из расширенной матрицы системы строки, состоящей из одних нулей),

2. умножение правой и левой части одного из уравнений на одно и тоже ненулевое число (умножение строки $(A_i|b_i)$ расширенной матрицы система на ненулевое число t: $(tA_i|tb_i)$),

3. замена i – ого уравнения системы на сумму i – ого и j – ого уравнения системы (замена i–ой строки $(A_i|b_i)$ расширенной матрицы системы на сумму строки и j – строки, умноженной на ненулевое число t: $(A_i + tA_j|b_i + tb_j)$).

4. перестановка местами двух уравнений системы (двух строк расширенной матрицы системы).

Теорема 2.2.1 *Пусть даны две системы уранений, заданные расширенными матрицами с одинаковым числом столбцов: $(A|b)$ и $(A'|b')$. Если вторую систему можно получить из первой, применив к ней конечное число равносильных преобразований, то они равносильны.*

Если матрицы $(A|b)$ и $(A'|b')$ удовлетворяют условию теоремы 2.2.1, то пишут $(A|b) \sim (A'|b')$.

2. Матрицу $A = (a_{j,k})$ будем называть трапецевидной, если она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,m} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

Трапецевидную матрицу вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

будем называть единично трапецевидной.

Для решения системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{5}$$

необходимо равносильными преобразованиями привести матрицу системы к виду трапецевидной матрицы (при необходимости следует перенумеровывать переменные и переставить уравнения):

$$A = \left(\begin{array}{cccccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,m} & \tilde{b}_1 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,m} & \tilde{b}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,m} & \tilde{b}_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \tilde{b}_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \tilde{b}_n \end{array}\right) \tag{6}$$

с ненулевыми элементами $a_{1,1}, \dots, a_{k,k}$.

Пример 2.2.0. *Пусть дана расширенная матрица системы*

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Перестановка столбцов матрицы системы соответствует переименованию переменных, входящих в эту систему. Тогда после перестановок столбцов получается трапецевидная матрица (и даже единично трапецевидной):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{[1]}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{[2]}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Замечание.

1 переставили местами строки с номерами 2 *и* 5*;*

2 переставили местами столбцы с номерами 2 *и* 5*;*

♠

Теорема 2.2.2 *Предположим, что система (5) равносильными преобразованиями приведена к виду (6).*

1. *Если $k = n$, то система (6) (и равносильная ей система (5)) совместная.*

2. *Если $k = n = m$, то система (6) (и равносильная ей система (5)) определённая.*

3. *Если $k = n$ и $k < m$, то система (6) (и равносильная ей система (5)) неопределённая.*

4. *Если $k < n$ и $\tilde{b}_{k+1} = \cdots = \tilde{b}_n = 0$, то система (6) (и равносильная ей система (5)) совместная и неопределённая.*

5. *Если $k < n$ и среди чисел $\tilde{b}_{k+1}, \ldots, \tilde{b}_n$ есть хотя бы одно ненулевое, то система (6) (и равносильная ей система (5)) несовместная*

Следствие 2.2.1 *Предположим, что система (5) равносильными преобразованиями приведена в разрешённую систему. Тогда имеет место ровно одно из следующих утверждений:*

0. *Если в получившейся системе есть противоречивое уравнение, то эта система несвместна;*

1. *Если не выполняется первое утверждение и в получившейся системе нет свободных переменных, то исходная система является определённой;*

2. *Если не выполняется первое утверждение и в получившейся системе есть хотя бы одна свободная переменная, то исходная система является неопределённой.*

3. Пусть дана система линейных уравнений, записанная в матричной форме $Ax = b$.

Алгоритм решения системы линейных уравнений, записанной в алгебраической форме (метод Гаусса)

1-ый шаг. Выбираем индексы k_0, j_0 так, что

- уравнение с номером j_0 ещё не разрешено,

- переменная с номером k_0 ещё не разрешённая,

- $a_{j_0,k_0} \neq 0$.

Все коэффициенты a_{j,k_0} ($j = 1, \ldots, m,\ j \neq j_0$) можно сделать равными нулю, если ко всем уравнениям системы прибавить строку с номером j_0, умноженную на подходящее число (равное $-\dfrac{a_{j,k_0}}{a_{j_0,k_0}}$).

2-ой шаг. Удаляем из системы все уравнения вида $0 = 0$.

3-ий шаг. Если система содержит уравнение $0 = b$ с $b \neq 0$, то рассматриваемая система является несовместной.

4-ый шаг. Если получена разрешённая система, то она будет совместной. Выражаем разрешённые переменные через свободные и пишем общее решение системы. В противном случае переходим на первый шаг.

Пример 2.2.1. *Пусть дана система уравнений*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Последовательно применяя равносильные преобразования, получим новые системы, равносильные данной:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -4x_1 & & & - & 3x_3 & = & -3 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ A_2 + 2A_1 \\ \\ \end{array},$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & \underline{x_2} & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \\ -4x_1 & & & - & 3x_3 & = & -3 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ \\ A_3 + A_2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & \underline{x_2} & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ \\ \text{удалим уравнение } 0 = 0 \end{array},$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & \underline{x_2} & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ A_1 - \dfrac{1}{3} \cdot A_2 \end{array},$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\dfrac{1}{3}x_1 & + & \underline{x_2} & & & = & 0 \\ 4x_1 & & & + & 3\underline{x_3} & = & 3 \end{array}\right\| ,$$

Неизвестные x_2, x_3 — разрешённые, x_1 — свободная:

$$X_2 = -\frac{1}{3}X_1, X_3 = -\frac{4}{3}X_1 + 1, X_1 \text{ — произвольное число.}$$

Ответ: общий вид $(X_1, -\frac{1}{3}X_1, -\frac{4}{3}X_1 + 1)^T$, $X_1 \in \mathbb{R}$. ♠

Алгоритм решения системы линейных уравнений, записанной в виде расширенной матрицы (метод Гаусса)

1-ый шаг. Выбираем индексы k_0, j_0 так, что

- уравнение с номером j_0 ещё не разрешено,
- переменная с номером k_0 ещё не разрешённая,
- $a_{j_0,k_0} \neq 0$.

Все коэффициенты a_{j,k_0} $(j = 1, \ldots, m,\ j \neq j_0)$ можно сделать равными нулю, если ко всем уравнениям системы прибавить строку с номером j_0, умноженную на подходящее число (равное $-\frac{a_{j,k_0}}{a_{j_0,k_0}}$).
2-ой шаг. Удаляем из расширенной матрицы системы все нулевые строки.
3-ий шаг. Если расширенная матрица системы содержит содержит строку вида $(0\ 0\ \ldots\ 0|b)$ с $b \neq 0$, то рассматриваемая система является несовместной.
4-ый шаг. Если получена разрешённая система, то она будет совместной. Выражаем разрешённые переменные через свободные и пишем общее решение системы. В противном случае переходим на первый шаг.
Пример 2.2.2. *Пусть дана расширенная матрица системы линейных уравнений*

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right\|$$

Последовательно применяя равносильные преобразования, получим новые матрицы, равносильные данной:

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & 11 & 14 & 17 & 3 \end{array}\right\| \begin{array}{l} C_1 + 2C_2 \\ (-1)C_2 \\ C_3 + 7C_2 \end{array},$$

$$\left\|\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & -11 & -4 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ \\ (-1/3)C_3 \end{array},$$

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & 11/3 & 4/3 \end{array}\right\| \begin{array}{l} C_1 + C_3 \\ C_2 - 2C_3 \\ \end{array},$$

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & -10/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & 11/3 & 4/3 \end{array}\right\|$$

Тогда, после перехода от матричной формы записи к алгебраической, то

$$\begin{cases} x_1 & - & 1/3x_4 & + & 2/3x_5 & = & 1/3 \\ x_2 & - & 5/3x_4 & - & 10/3x_5 & = & -5/3 \\ x_3 & + & 7/3x_4 & + & 11/3x_5 & = & 4/3 \end{cases}.$$

. Разрешённые переменные — x_1, x_2, x_3. Свободные переменные — x_4, x_5.

Ответ: Общее решение имеет вид:

$(1/3X_4 - 2/3X_5 + 1/3; 5/3X_4 - 10/3X_5 - 5/3; -7/3X_4 - 11/3X_5 + 4/3)^T$, $X_4, X_5 \in \mathbb{R}$.

♠

2.3 Системы уравнений с квадратной матрицей

1. В этом разделе будут найдены условия разрешимости систем линейных уравнений с квадратной матрицей.

Теорема 2.3.1 *Предположим, что матрица системы $Ax = b$ является квадратной. Следующие условия равносильны:*

1. *$|A| \neq 0$ (т.е. матрица A обратима),*
2. *система $Ax = b$ имеет единственное решение для любой правой части,*
3. *однородная система $Ax = 0$ имеет единственное решение.*

Теорема 2.3.2 *Предположим, что матрица системы $Ax = b$ является квадратной и обратимой. Тогда система этой системы имеет единственное решение, которое даётся формулой $x = A^{-1}b$.*

Теорема 2.3.3 (Правило Крамера) *Пусть дана система*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{7}$$

с невырожденной матрицей A и вектор-столбцом членов b. Тогда единственное решение системы $(X_1, \dots, X_n)$ *определяется из равенств:*

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, X_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

в которых

$$\Delta = |A|, \tag{8}$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & \mathbf{b}_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k-1} & \mathbf{b}_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & \mathbf{b}_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Пример 2.3.0. *Решите систему уравнений*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -3 \end{array}\right. .s$$

Применим метод Крамера. Для этого вычисляем определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0, \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -24, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 4$$

Тогда $X_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{1}{2}$, $X_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -1$, $X_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{1}{6}$. *Рассматриваемая система имеет единственное решение* $(\dfrac{1}{2}, -1, \dfrac{1}{6})^T$. ♠

2. Пусть дана обратимая (следовательно — квадратная) матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Нахождение матрицы, обратной к матрице A, сводится к решению семейства неоднородных систем линейных уравнений со столбцами правых частей специального вида.

Теорема 2.3.4 *Если $B = A^{-1}$ — матрица, обратная к матрице A, то её s-ый столбец является решением системы уравнений*

$$A_1 b_{1s} + A_2 b_{2s} + \dots + A_s b_{ns} = E_s$$

Для нахождения матрицы, обратной к квадратной матрице $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ необходимо с помощью элементарных преобразований привести к виду единичной матрицы левую часть расширенной матриц систем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \end{array}\right), \dots, \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 1 \end{array}\right).$$

Рассмотрим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{array}\right)$$

Матрица A обратима тогда и только тогда, когда после неоднократного применения равносильных преобразования строк матрица $\tilde{A}$ будет преобразована к виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{12} & b_{22} & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n2} & b_{n2} & \cdot & b_{nn} \end{array}\right)$$

В этом случае правая часть расширенной матрицы $\tilde{A}$ будет совпадать с матрицей, обратной к матрице A.

Пример 2.3.1. *Найдите матрицу, обратную к матрице A:*

$$A = \left\| \begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \right\|.$$

Если применять равносильные преобразования к расширенной матрице системы, получаются следующие матрицы:

$$\left\|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ C_2 - 2C_1\ , \\ C_3 + C_1 \end{array}$$

$$\left\|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ C_2 - 3C_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left\|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{l} C_1 + C_2 \\ \qquad\qquad ; \\ C_3 - C_2 \end{array}$$

$$\left\|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 4 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ C_2 \leftrightarrow C_3\ ; \\ \\ \end{array}$$

$$\left\|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right\|$$

Поэтому

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

♠

3 Модель "Затраты–выпуск" В. В. Леонтьева

1. Предположим, что в далёкой-далёкой деревне потребляется только два типа продукции — молочные продукты и изделия из железа и есть только два производства — ферма и кузница, на которых работают все жители деревни. Жители деревни платят налоги в виде фисированного количества произведимой продукции. Вся продукция, оставшаяся после потребления производителями идёт на выплату налогов. Очевидно, что искомые числа должны быть неотрицательными.

	Общий объём	Ферма	Кузнеца	Налоги (ед. продукции)
Молоко	x_1	$0,1x_1$	$0,2x_2$	100
Железо	x_2	$0,2x_1$	$0,1x_2$	20

В талице записана доля от произведённой продуции того или иного вида необходима для работы фермы и кузнецы.

Необходимо найти объёмы производства молочной продукции x_1 и железных изделий x_2, который обеспечил бы выплату налогов.

Числа x_1 и x_2 находятся из системы

$$\begin{cases} x_1 & - & 0,1x_1 & - & 0,2x_2 & = & 100 \\ x_2 & - & 0,2x_1 & - & 0,1x_2 & = & 20 \end{cases}, \begin{cases} & & 0,9x_1 & - & 0,2x_2 & = & 100 \\ - & & 0,2x_1 & + & 0,9x_2 & = & 20 \end{cases},$$

Решая эту систему известными методами (например, методом Крамера) находим

$$x_1 = 122,0779221, x_2 = 49,35064935.$$

2. Пусть даны

1. квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

с положительными элементами и $a_{11} < 1, \dots, a_{nn} < 1$;

2. вектор-столбец $c = (c_1; c_2; \dots c_n)^T$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 & -(& a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots - & a_{1n}x_n) & = & c_1 \\ x_2 & -(& a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots - & a_{2n}x_n) & = & c_2 \\ \dots \\ x_n & -(& a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \dots + & a_{nn}x_n) & = & c_n \end{cases} \tag{10}$$

или равносильную ей систему

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 & - & a_{12}x_2 & - \dots - & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ -a_{21}x_1 & + & (1-a_{22})x_2 & - \dots - & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \dots \\ -a_{n1}x_1 & - & a_{n2}x_2 & - \dots + & (1-a_{nn})x_n & = & c_n \end{cases}.$$

Эти системы могут быть записаны и в матричной форме: $x - Ax = c$.

Система (10) имеет простую интерпретацию:

I. в экономической системе имеется n типов продуктов $x_1, \dots, x_n$ и такое же количество отраслей производства;

II. каждая отрасль производит только один тип продукта и совместное производство исключается;

III. под производственым процессом (в каждой отрасли) понимается преобразование некоторых (в частности — всех) типов продуктов в некоторое количество одного определённого типа продуктов. В модели Леонтьева производство описывается следующим образом:

> количество j–ого продукта, производимого в i-ой отрасли, пропорционально фиксированному числу $a_{ij} > 0$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Числа a_{ij} называют технологическими коэффициентами. Числа

$$x_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots - a_{in}x_n) = c_i$$

равны количеству i-го продукта, который идет на потребление в непроизводственной сфере (в том числе и на выплату налогов). Другими словами система (10) позволяет определить по заданным технологическим коэффициентам и известным уровням потребления каждого продукта в непроизводственной форме необходимые объёмы каждого продукта. Модель называют работоспособной, если система (10) имеет неотрицательное решение.

Задача состоит в следующем:

> необходимо найти условия, при выполнении которых система (10) имеет неотрицательное решение.

Перепишем эту систему в равносильной матричной форме $Dx = c$, где $D = (d_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ и

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ii}, & i = j \\ -a_{ij}, & i \neq j \end{cases} . \tag{11}$$

У матрицы D все элементы, не лежащие на главной диагонали, отрицательны.

Теорема 3.0.5 *Следующие условия равносильны*

1. *система $Dx = c$ имеет неотрицательное решение хотя бы для одного вектор-столбцы правых частей, состоящего из положительных чисел;*

2. *система $Dx = c$ имеет неотрицательное решение любого вектор-столбца правых частей, состоящего из неотрицательных чисел*

3. определители (которые называют угловыми минорами матрицы D) положительны:

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

для произвольного $k = 1, \dots, n$.

Пример 3.0.2. *Рассмотрим модель, задаваемую системой* $x - Ax = c$*, в которой*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/20 & 1/10 \\ 1/5 & 1/10 & 1/15 \\ 1/4 & 1/10 & 1/10 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Необходимо определить, будет ли эта модель работоспособной. Для этого вычислим следующие миноры:

$$\begin{vmatrix} 1/2 \end{vmatrix} = 1/2 > 0, \begin{vmatrix} 1/2 & 1/20 \\ 1/5 & 1/10 \end{vmatrix} = 1/25 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/20 & 1/10 \\ 1/5 & 1/10 & 1/15 \\ 1/4 & 1/10 & 1/10 \end{vmatrix} = 1/1000 > 0.$$

Поэтому рассматриваемая модель будет работоспособной ♠

Пример 3.0.3. *Рассмотрим модель, задаваемую системой* $x - Ax = c$*, в которой*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/20 & 1/10 \\ 1/5 & 1/10 & 1/15 \\ 1/4 & 1/10 & 1/20 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Необходимо определить, будет ли эта модель работоспособной. Для этого вычислим следующие миноры:

$$\begin{vmatrix} 1/2 \end{vmatrix} = 1/2 > 0, \begin{vmatrix} 1/2 & 1/20 \\ 1/5 & 1/10 \end{vmatrix} = 1/25 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/20 & 1/10 \\ 1/5 & 1/10 & 1/15 \\ 1/4 & 1/10 & 1/20 \end{vmatrix} = -1/1000 < 0.$$

Поэтому рассматриваемая модель не будет работоспособной ♠

4 Векторные пространства

4.1 Определение, примеры

Множество X называют векторным пространством (точнее, вещественным векторным пространством), если для всех $x \in X$, $y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ заданы операции $(x, y) \mapsto x + y \in X$ (сумма векторов), $(\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X$ (произведение числа и вектора), удовлетворяющие следующим условиям:

1°. $x + y = y + x$ для произвольных $x \in X$, $y \in X$;

2°. $x + (y + z) = (x + y) + z$ для произвольных $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$;

3°. существует вектор $0 \in X$ (называемый нулевым вектором) такой, что $0 + x = x + 0 = x$ для любого $x \in X$;

4°. для произвольного $x \in X$ существует вектор $-x \in X$ (называемый вектором, противоположным к вектору x) такой, что $x + (-x) = 0$;

5°. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) = \mu(\lambda x)$ для произвольных $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $x \in X$;

6°. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ и $\lambda(x + y) - \lambda x + \lambda y$для произвольных $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$;

7°. $1x = x$ для произвольного $x \in X$;

Элементы векторного пространства называются так же векторами или точками.

Пример 4.1.0. *Множество всех $m \times n$–матриц является векторным пространством, которое обозначим через $M_{m\times n}$.*

Множество $M_{m\times n}$ будет вещественным векторным пространством, если определить векторные операции в этом пространстве покоординатно:

$$A + B := (a_{i,j} + b_{i,j}), \lambda A := (\lambda a_{i,j})$$

для произвольных $A = (a_{i,j}) \in M_{m\times n}$, $B = (b_{i,j}) \in M_{m\times n}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Можно показать, что

- *нулевой элемент в $M_{m\times n}$ равен нулевой матрице (размера $m \times n$);*

- *вектор, противоположный к матрице $A = (a_{i,j}) \in M_{m\times n}$, определяется следующим образом $-A := (-a_{i,j})$.*

♠

Пример 4.1.1. *Пусть* $\mathbb{R}^n$ *— множество всех* n*–мерных вектор–столбцов*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

Множество $\mathbb{R}^n$ *будет вещественным векторным пространством, если определить векторные операции в этом пространстве покоординатно:*

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^T,$$
$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)^T$$

для произвольных $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Можно показать, что*

$$0 := \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ нулей}}{}^T, -x := (-x_1, \dots, -x_n)^T$$

соответственно нулевой вектор в $\mathbb{R}^n$ *и вектор, противоположный вектору* $x := (x_1, \dots, x_n)$. ♠

Пример 4.1.2. *Пусть* X *— векторное пространство. Подмножество* L *в* X *называют подпространством в* X *(точнее векторным подпространством), если это подмножество замкнуто относительно векторных операций в* X. *Точнее,* L *будет подпространством в* X, *если* $\lambda x + \mu y \in L$ *для произвольных* $x, y \in L$.

Во всяком векторном пространстве существуют как минимум два векторных подпространства (называемые тривиальными или несобственными): $\{0\}$ *(т. е. векторное подпространство, состоящее только из одного нулевого элемента) и само векторное пространство* X. *Все остальные подпространства в* X *называют собственными подпространствами.*

Рассмотрим два матричных уравнения: неоднородное $Ax = b$ *и однородное* $Ax = 0$, *где* $A \in M_{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 4.1.1 *Множество решений матричного уравнения* $Ax = 0$ *является векторным подпространством в* $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.1.2 *Множество векторов* $b \in \mathbb{R}^m$, *для которых матричное уравнение* $Ax = b$ *имеет решение, будет векторным подпространством в* $\mathbb{R}^m$.

♠

4.2 Линейная независимость

Конечное семейство x_1, x_2, $\dots$, x_s элементов векторного пространства X называют линейно зависимым, если существует числовое семейство коэффициентов $(C_j)_{j=1,\dots,s}$ такое, что $\sum\limits_{j=1}^{s} C_j x_j = 0$, но не все коэффициенты C_j — нулевые. Если данное подмножество не является линейно зависимым, то его называют линейно независимым. Другими словами, линейная независимость множества x_1, x_2, $\dots$, x_s равносильна тому, что равенство

$$\sum_{j=1}^{s} C_j x_j = 0$$

возможно только тогда, когда $C_1 = C_2 = \dots = C_s = 0$.

Пример 4.2.0. *Покажем, что семейство векторов*

$$\begin{aligned}
&E_1 = (1, 0, \dots, 0)^T;\\
&E_2 = (0, 1, \dots, 0)^T;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&E_n = (0, 0, \dots, 1)^T;
\end{aligned}$$

линейно независимо в $\mathbb{R}^n$. Действительно, из определений линейной зависимости и векторных операций в $\mathbb{R}^n$ следует, что равенство

$$0 = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_n E_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$$

возможно тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. ♠

Теорема 4.2.1 *Пусть x_1, x_2, $\dots$, x_n — линейно независимое семейство в $\mathbb{R}^n$. Тогда для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ существует единственное числовое семейство λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n такое, что $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \dots + \lambda_n x_n$.*

Теорема 4.2.2 *Если семейство x_1, x_2, $\dots$, x_n содержит нулевой вектор, то оно линейно зависимо.*

Теорема 4.2.3 *Предположим, что квадратная матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ образована столбцами A_1, A_2, $\dots$,A_n (или строками A^1, A^2, $\dots$,A^n). Тогда следующие условия равносильны:*

1. *A_1, A_2, $\dots$,A_n (соответственно, A^1, A^2, $\dots$,A^n) - линейно независимы.*

2. $|A| \neq 0$.

3. матрица A *— обратимая.*

Пример 4.2.1. *Покажем, что семейство векторов*

$$x_1 = (1, 2, 3)^T;$$
$$x_2 = (1, 8, 7)^T;$$
$$x_3 = (-1, 1, -1)^T;$$

линейно зависимо в $\mathbb{R}^3$*. Это следует из того, что*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

♠

4.3 Базисы системы векторов

Базисом системы векторов A_1, A_2, $\ldots$,A_n называют её подсистему B_1, B_2, $\ldots$, B_m такую, что

1. B_1, B_2, $\ldots$, B_m линейно независимая система,

2. любой вектор системы A_1, A_2, $\ldots$,A_n разлагается по векторам, т.е. произвольный вектор A_j, $j = 1, \ldots n$ может образом представлен в виде
$$A_j = \alpha_{j,1}B_1 + \alpha_{j,2}B_2 + \cdots + \alpha_{j,m}B_m, \alpha_{j,k}\text{— числа.}$$

Определение 4.3.1 *Пусть дана система векторов* C_1, C_2, $\ldots$, C_m *в* $\mathbb{R}^m$*. Эту систему называют диагональной, если вектора этой системы задают диагональную матрицу с ненулевыми диагональными элементами.*

Лемма 4.3.1 *Если диагональная система является подсистемой системы* m*–ых векторов* A_1, A_2, $\ldots$,A_n $(n \geqslant m)$*, то эта подсистема является базисом системы векторов* A_1, A_2, $\ldots$,A_n*.*

Лемма 4.3.2 *Всякая линейно независимая подсистема в конечной системе векторов является либо её базисом любо её можно дополнить до базиса.*

Теорема 4.3.1 *Пусть дана конечная система векторов в $\mathbb{R}^m$, содержащая ненулевой вектор. Из неё можно выделить подсистему, которая является базисом рассматриваемой системы векторов.*

Алгоритм нахождения базиса системы векторов

Дано: система векторов $A_1, \ldots, A_n$ в $\mathbb{R}^m$. Необходимо выделить из неё базис и найти разложение остальных векторов системы по базисным. Для этого рассмотрим однородную системы уравнений

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = 0 \tag{12}$$

1-ый шаг. Составим из данных векторов матрицу A, которую мы будем рассматривать как расширенную матрицу однородной системы уравнений $Ax = 0$ (при этом можно не приписывать к к матрице A вектор–столбец правых частей).

2-ой шаг. Решаем эту систему методом Гаусса. Полученная при этом система

$$x_1B_1 + x_2B_2 + \cdots + x_nB_n = 0 \tag{13}$$

будет равносильна исходной. Предположим, что x_1,…x_k — разрешённые переменные, x_{k+1},…,x_n — свободные. Если необходимо, перенумеруем переменные и векторы из системы векторов.

3-ий шаг. Задаём конкретные значения свободных переменных. В каждой строке следующей таблицы только одна свободная переменная равна 1, остальные равны 0:

X_1	X_2	X_3	$\ldots$	X_k	X_{k+1}	$\ldots$	X_n	
1	0	0	$\ldots$	0	X'_{k+1}	$\ldots$	X'_n	$A_1 + X'_{k+1}A_{k+1} + \cdots + X'_nA_n = 0$
0	1	0	$\ldots$	0	X''_{k+1}	$\ldots$	X''_n	$A_2 + X''_{k+1}A_{k+1} + \cdots + X''_nA_n = 0$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	0	0	$\ldots$	1	X'''_{k+1}	$\ldots$	X'''_n	$A_k + X'''_{k+1}A_{k+1} + \cdots + X'''_nA_n = 0$

4-ый шаг. Векторы $A_{k+1}, \ldots, A_n$ образуют базис рассматриваемой системы векторов. Используя полученную таблицу (последний столбец), находим разложение остальных векторов системы через базисные:

$$\begin{aligned}
&A_1 = -X'_{k+1}A_{k+1} - \cdots - X'_nA_n\\
&A_2 = -X''_{k+1}A_{k+1} - \cdots - X''_nA_n\\
&\ldots\\
&A_k = -X'''_{k+1}A_{k+1} - \cdots - X'''_nA_n
\end{aligned}$$

Пример 4.3.0. *Найдите базис системы векторов*

$$A_1 = (1; 2; -2)^T; A_2 = (2; 3; 3)^T; A_3 = (3; 4; 5)^T; A_4 = (4; 5; 6)^T;$$
$$A_5 = (5; 6; 7)^T.$$

Имеем однородную систему уравнений, записанную векторной форме:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_4A_4 = 0.$$

Составляем расширенную матрица этой однородной системы:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Если применить к этой матрице метода Гаусса (проделайте необходимые выкладки самостоятельн), получим новую матрицу

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 & -10/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & 11/3 & 0 \end{array}\right)$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$(\frac{1}{3}X_4 - \frac{2}{3}X_5, \frac{5}{3}X_4 + \frac{10}{3}X_5, -\frac{7}{3}X_4 - \frac{11}{3}X_5, X_4, X_5)^T,$$
$$X_4, X_5 \in \mathbb{R}.$$

Составляем таблицу

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}A_1 + \frac{5}{3}A_2 - \frac{7}{3}A_3 + A_4 = 0$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{11}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}A_1 + \frac{10}{3}A_2 - \frac{11}{3}A_3 + A_5 = 0$

Таким образом:

1. A_1, A_2, A_3 — *базис рассматриваемой системы векторов;*

2. $A_4 = -\frac{1}{3}A_1 - \frac{5}{3}A_2 + \frac{7}{3}A_3$, $A_5 = \frac{2}{3}A_1 - \frac{10}{3}A_2 + \frac{11}{3}A_3$

♠

4.4 Базисы векторных пространств

Пусть X — векторное пространство и дано множество $\{A_1, \dots A_N\}$ элементов этого протранства. Это семейство называют векторным базисом векторного пространства X, если выполняется следующее условие:

> для произвольного $x \in X$ существует единственный набор чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такой, что $x = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_N A_N$.

Пример 4.4.0. *Семейство векторов $E_1, \dots, E_n$ является базисом в $\mathbb{R}^n$.* ♠

Лемма 4.4.1 *Семейство векторов $A_1, \dots, A_n$ является базисом в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда определитель матрицы $(A_1 A_2 \dots A_n)$, составленной из заданных векторов, не равен нулю.*

Теорема 4.4.1 *В любом векторном пространстве, содержащем более одного элемента, существует векторный базис.*

Замечание. *В векторном пространстве, состоящем из единстенного элемента, векторного не существует.*

Теорема 4.4.2 *Пусть X — векторное пространство, содержащее более одного элемента. Любые два базиса в X содержат одинаковое число элементов.*

При сделанном предположении, число элементов n в векторном пространстве X называют размерностью пространства X и обозначают через $\dim(X)$ (а пространство X называют n–мерным). Элементы n–мерного пространства в дальнейшем будем назвать n–мерными векторами.

Например, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

4.5 Общий вид решения однородной и неоднородной системы

1. Как уже упоминалось, множество L решений однородной системы уравнений $Ax = 0$ является векторным пространством. Тогда

1. это пространство содержит единственный элемент. В это случае векторное пространство L состоит из единственного вектора (который совпадает с нулевым вектором). Из сделанного выше замечания следует, что в L нет векторного базиса.

2. В L содержится более одного элемента. Из леммы 4.4.1 следует, что в L существует векторный базис.

Фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений называют произвольный базис во пространстве решений этой системы. Из теоремы 4.4.2 следует, что любые две фундаментальные системы векторов (в пространстве решений рассматриваемой системы уравнений) имеют одинаковое число элементов.

Если F_1, …, F_s — фундаментальная система решений однородной системы $Ax = 0$, то произвольное решение x этой системы можно единственным способом записать в виде $x = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_s F_s$.

Алгоритм нахождения фундаментальной системы решений однородной системы.

Пусть дана однородная система $Ax = 0$. Будем считать, что n — число неизвестных в этой системе

1-й шаг. Найдем общее решение этой системы. Предположим, что получено r разрешённых неизвестных. Свободные неизвестные запишем в виде $n-r$–мерных векторов $(y_1, \ldots, y_{n-r})$. Если неоходимо, перенумеруем неизвестные.

2-й шаг. Подставляем последовательно в общее решение системы следующие значения свободных неизвестных:

$$E_1 = (1, 0, \ldots, 0), E_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, E_{n-r} = (0, 0, \ldots, 1).$$

В результате будут получены частные решения системы F_1, F_2,…, F_{n-r}.

3-й шаг. Полученная система векторов F_1, F_2,…, F_{n-r} будет фундаментальной системой решений однородной системы уравнений.

Пример 4.5.0. *Найдём фундаментальную систему решений однородной системы уравнений:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 7x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & 5x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \end{array}\right. .$$

После применения метода Гаусса поличим:

$$\begin{cases} \quad - \ 13x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 \qquad\qquad\qquad + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Общее решение этой системы имеет вид (x_1 и x_4 — разрешённые переменные, x_2, x_3, x_5 — свободные неизвестные):

$$(5X_2 - X_5, X_2, X_3, 13X_2 + 2X_3 + X_5, X_5)$$

Пусть

$$E_1 = (1, 0, 0)^T, E_2 = (0, 1, 0)^T, E_3 = (0, 0, 1)^T.$$

Тогда искомые значения свободных неизвестных:

$$\begin{gathered} X_2 = 1, X_3 = 0, X_5 = 0 \\ X_2 = 0, X_3 = 1, X_5 = 0 \\ X_2 = 0, X_3 = 0, X_5 = 1. \end{gathered}$$

Подставляя эти значения в общее решение системы, находим искомое фундаментальное решение:

$$F_1 = (5, 1, 0, 13, 0)^T; F_2 = (0, 0, 1, 2, 0)^T; F_3 = (-1, 0, 0, 1, 1)^T.$$

Общее решение данной системы имеет вид $x = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$. ♠

2. Множество решений системы $Ax = b$ будет векторным пространством тогда и только тогда, когда эта системы является однородной.

Теорема 4.5.1 *Пусть $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,m}$ матрица системы размера $m \times n$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ — вектор–столбец правых частей системы. Тогда любое решение $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ неоднородной системы линейных уравнений (записанной в матричной форме) $Ax = b$ можно записать в виде*

$$x = \tilde{x} + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k,$$

где

1. *$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ фиксированное решение неоднородной системы $Ax = b$;*

2. *x^1, x^2, $\dots$, x^k — фундаментальная система решений однородной системы $Ax = 0$;*

3. *α_1, α_2, $\dots$, α_k — произвольные числа.*

Алгоритм нахождения общего решения неоднородной системы (векторной форме).

Пусть дана неоднородная система $Ax = b$ и соответствующая ей однородная система $Ax = 0$. Будем считать, что n — число неизвестных в системе, m — число уравнений в системе.

1-й шаг. Найдём общее решение этой системы. Предположим, что получено r разрешённых неизвестных. Свободные неизвестные запишем в виде $n-r$–мерных векторов $(y_1, \dots, y_{n-r})$. Общее решение однородной системы можно получить, если положить $b = 0$ (т.е. $b_1 = 0, \dots,$ $b_m = 0$).

2-й шаг. Найдём некоторое частное решение $\tilde{X}$ неоднородной системы, положив в общем решении этой системы все свободные переменные равными 0.

3-й шаг. Подставляем последовательно в общее решение однородной системы следующие значения свободных неизвестных:

$$E_1 = (1, 0, \dots, 0), E_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, E_{n-r} = (0, 0, \dots, 1).$$

В результате будут получены частные решения однородной системы системы F_1, $F_2, \dots,$ F_{n-r}.

4-й шаг. Полученная система векторов F_1, $F_2, \dots,$ F_{n-r} будет фундаментальной системой решений однородной системы уравнений.

5-й шаг. Общее решение (записанное в векторной форме) неоднородной системы имеет вид

$$X = \tilde{X} + \alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_{n-r} F_{n-r}.$$

Пример 4.5.1. *Найдите общее решение системы уравнений (заданной расширенной матрицей)*

$$\left\| \begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 3 \end{array} \right\|$$

Разрешаем эту систему относительно неизвестных x_1 и x_2:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 3 \end{array} \right\| \begin{array}{c} C_1 - C_2 \\ \end{array}, \quad \left\| \begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 0 & 8 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 3 \end{array} \right\| \begin{array}{c} \frac{1}{2}C_1 \\ \end{array},$$

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 3 \end{array} \right\| \begin{array}{c} \\ C_2 + C_1 \end{array}, \quad \left\| \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \end{array} \right\| \begin{array}{c} \frac{1}{2}C_1 \\ \end{array},$$

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \end{array} \right\| .$$

Общее решение решаемой системы и соответствующей ей однородной системы следующий вид:

$$(-3X_3 + 5, -2X_4 + 1, X_3, X_4)^T, (-3X_3, -2X_4, X_3, X_4)^T.$$

Находим частное решение неоднородной системы (положив $X_3 = X_4 = 0$):

$$\tilde{X} = (5, 1, 0, 0)^T.$$

Находим фундаментальную систему однородной системы. Пусть

$$E_1 = (1, 0)^T, E_2 = (0, 1)^T.$$

Тогда искомые значения свободных неизвестных:

$$\begin{array}{c} x_3 = 1, x_4 = 0; \\ x_3 = 0, x_4 = 1; \end{array}$$

Подставляя эти значения в общее решение однородной системы, находим искомую фундаментальную систему решений:

$$F_1 = (2, 1, 1, 0)^T; F_2 = (5, -1, 0, 1)^T.$$

Общее решение исходной системы имеет вид $X = \tilde{X} + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$. ♠

Пример 4.5.2. *Найдём условия разрешимости и общий вид решения неоднородной системы уравнений:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & b_1 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 7x_5 & = & b_2 \\ x_1 & - & 5x_2 & & & & & + & x_5 & = & b_3 \\ 4x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 5x_5 & = & b_4 \end{array} \right. .$$

Разрешим эту систему (относительно неизвестных x_1 и x_4):

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrl} & - & 13x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & -b_1 \\ x_1 & - & 5x_2 & & & & & + & x_5 & = & -b_2+2b_1 \\ & & & & & & & & 0 & = & b_4-b_1 \\ & & & & & & & & 0 & = & b_3+b_2-2b_1 \end{array}\right. .$$

Условия разрешимости системы: $b_4 = b_1$, $b_2 + b_3 = 2b_1$.

Общее решение неоднородной системы имеет вид (x_2, x_3, x_5 — свободные неизвестные):

$$(b_3 + b_2 - 2b_1 + 5X_2 - X_5, X_2, X_3, -b_1 + 13X_2 + X_3 + X_5, X_5), \qquad (14)$$

а однородной —

$$(5X_2 - X_5, X_2, X_3, 13X_2 + 2X_3 + X_5, X_5). \qquad (15)$$

Найдём частное решение $\tilde{X}$ неоднородной системы (для этого положим в (14) $X_2 = X_3 = X_5 = 0$):

$$\tilde{x} = (b_3 + b_2 - 2b_1, 0, 0, -b_1, 0)^T.$$

Найдём фундаментальную систему решений однородной системы уравнений. Пусть

$$E_1 = (1, 0, 0)^T, E_2 = (0, 1, 0)^T, E_3 = (0, 0, 1)^T.$$

Тогда искомые значения свободных неизвестных:

$$\begin{array}{c} X_2 = 1, X_3 = 0, X_5 = 0 \\ X_2 = 0, X_3 = 1, X_5 = 0 \\ X_2 = 0, X_3 = 0, X_5 = 1 \end{array}$$

Подставляя эти значения в общее решение однородной системы (15), находим искомое фундаментальное решение:

$$\begin{array}{l} F_1 = (b_3 + b_2 - 2b_1 + 5, 1, 0, -b_1 + 13, 0)^T; \\ F_2 = (b_3 + b_2 - 2b_1, 0, 1, -b_1 + 1, 0)^T; \\ F_3 = (b_3 + b_2 - 2b_1 - 1, 0, 0, -b_1 + 1, X_5)^T. \end{array}$$

Общее решение данной системы имеет вид $X = \tilde{X} + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$.
♠

4.6 Ранг систем векторов и матрицы

1. Рангом матрицы A (который обозначим через $\mathrm{rg}(A)$) называют ранг системы её столбцов, т.е. число элементов базиса системы векторов, которые образуют матрицу

Теорема 4.6.1 *Предположим, что системы уравнений (записанные в матричной форме) $Ax = 0$ и $Bx = 0$ эквивалентны. Тогда матрицы A и B имеют одинаковый ранг:* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Теорема 4.6.2 *Ранг матрицы равен рангу системы строк, которые образуют эту матрицу.*

2. Минором k–го порядка матрицы будем называть определитель любой квадратной $k \times k$–матрицы, которая получается из заданной после вычёркивания некоторых строк и столбцов (такие матрицы будем называть подматрицами).

Пример 4.6.0. *Пусть дана матрица*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & 23 & 34 & 45 \\ 111 & 233 & 344 & 455 \end{pmatrix}$$

Если из этой матрицы вычеркнуть строку с номером $i = 1$, столбцы с номерами $j = 1$, $j = 4$ и вычислить определитель получившейся матрицы, то получается минор 2–порядка рассматриваемой матрицы:

$$\begin{vmatrix} 23 & 34 \\ 233 & 344 \end{vmatrix} = 7645.$$

♠

Теорема 4.6.3 *Ранг матрицы равен наибольшему порядку ненулевого минора этой матрицы*

Алгоритм вычисления ранга матрицы (метод окаймляющих миноров)

Дано: $m \times n$–матрица A. Необходимо вычислить её ранг.

1–ый шаг Если $A = 0$ (т.е. все элементы матрицы A равны нулю), то $\mathrm{rg}(A) = 0$. В противном случае положим $k = 1$.

2–ой шаг Пусть A' квадратная $k \times k$–матрица, полученная из исходной матрицы после вычёркивания некоторых строк и столбцов, и такая, что $|A'| \neq 0$. Если $k = \min(m,n)$, то $\mathrm{rg}(A) = k$.

3–ий шаг Рассмотрим все $(k+1)\times(k+1)$–матрицы, содержащие матрицу A' как подматрицу. Если определители всех этих матриц равны нулю, то $\mathrm{rg}(A) = k$. Если это не так, то выберем из них матрицу с ненулевых определителем и обозначим её через через A'. Так как $k < \min(m,n)$, то увеличим значение k на единицу и перейдём на 2-ой шаг.

Пример 4.6.1. *Вычислите ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $k = 1$. Выберем $k \times k$–подматрицу $A' = (1)$ с ненулевым определителем.

Переберём все 2×2–подматрицы матрицы A, окаймляющие матрицу A' и вычислим их определители, пока не найдём подматрицу с ненулевым определителем (и обозначим эту матрицу через A'):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, |A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{16}$$

Пусть $k = 2$. Переберём все 3×3–подматрицы матрицы A, окаймляющие матрицу A' и вычислим их определители, пока не найдём подматрицу с ненулевым определителем (и обозначим эту матрицу через A'):

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

Так как все эти определители равны нулю, то $\mathrm{rg}(A) = 2$. ♠

Пример 4.6.2. *Вычислите ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & \underline{1} \\ -18 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $k = 1$. Выберем $k \times k$–подматрицу $A' = (1)$ с ненулевым определителем (выбираем элемент матрицы, находящийся на пересечении строки с номером $k = 3$ и столбца с номером $j = 4$).

Из всех 2×2–подматриц матрицы A, окаймляющие матрицу A' выберем подматрицу с ненулевым определителем (и обозначим эту матрицу через A'):

$$|A'| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{18}$$

Пусть $k = 2$. Переберём все 3×3–подматрицы матрицы A, окаймляющие матрицу A' и вычислим их определители, пока не найдём подматрицу с ненулевым определителем (и обозначим эту матрицу через A'):

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \tag{19}$$

Пусть $k = 3$. Единственная 4×4–подматрица матрицы A, которая окоймляет матрицу A', совпадает с матрицей A. Но $|A| = 0$. Следовательно $\mathrm{rg}(A) = 3$. ♠

4.7 Скалярное произведение. Метрика. Норма.

1. Будем говорить, что на векторном пространстве E задано скалярное произведение, если каждой паре векторов $x \in E$, $y \in E$ соответствует число (x, y) (которое называется скалярным произведение векторов x, y) так, что выполняются следующие условия:

1. $(x, x) \geqslant 0$,
2. $(x, x) = 0$ тогда и только тогда когда $x = 0$,
3. $(x, y) = (y, x)$,
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
5. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

для произвольных x, y из E и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пример 4.7.0. *Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ (и в любом векторном подпространстве в $\mathbb{R}^n$) определяется равенством:*

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Вычислите выражение $(2x + 3y, 2x - y)$, в котором x, y — точки векторного пространства E, в котором задано скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, такие, что $(x, x) = 1$, $(y, y) = 1$, $(x, y) = 1/4$.

Из свойств скалярного произведения следует, что

$$\begin{aligned}(2x+3y,2x-y) &\overset{(3)}{=} (2x,2x-y)+(3y,2x-y) \overset{(4)}{=}\\ = 2(x,2x-y)+3(y,2x-y) &\overset{(5)}{=} 2(2x-y,x)+3(2x-y,y) \overset{(3),(4)}{=}\\ &= 2(2(x,x)-(y,x))+3(2(x,y)-(y,y)) =\\ &= 4(x,x)+(-2(x,y)+6(y,x))-3(y,y) =\\ &= 4(x,x)+4(x,y)-3(y,y)=2.\end{aligned}$$

Символ $\overset{(3),(4)}{=}$ *означает, что при выводе соответствующего равенства были использованы свойства (3), (4) из определения скалярного произведения.* ♠

2. Пусть E — векторное пространство. Будем говорить, что на E определена норма $\|\cdot\|$, если каждому $x \in E$ ставится в соответствие число $\|x\|$ (называемое нормой x), если следующие условия

1. $\|x\| \geqslant 0$,
2. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$,
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
4. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

выполняются для произвольных $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.7.1 *Пусть E — векторное пространство, на котором задано скалярное произведение $(.,.)$. Неравенство (называемое неравенством Коши–Буняковского)*

$$|(x,y)| \leqslant (x,x)^{1/2}(y,y)^{1/2}$$

выполняется для произвольных $x \in E$, $y \in E$.

Теорема 4.7.2 *Пусть E — векторное пространство, на котором задано скалярное произведение $(.,.)$. Тогда $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ — норма на E. В частности, в $\mathbb{R}^n$ определена норма, задаваемая равенством*

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

3. Пусть X — произвольное множество. Будем говорить, что на X задана метрика, если для любых элементов этого множества x, y определено число $\rho(x,y)$ (называемое расстоянием между x и y) такое, что следующие условия

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$,

2. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$,

3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

выполняются для любых элементов множества X. Множество, на котором определена метрика, называют метрическим.

Пример 4.7.1. *Пусть X — произвольное множество. Метрика на X (которая называется дискретной) определяется следующим равенством:*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

♠

Пример 4.7.2. *Пусть E — векторное пространство со скалярным произведением $(.,.)$. Тогда метрика на E определяется следующим равенством:*

$$\rho(x, y) = (x - y, x - y)^{1/2} = \|x - y\|$$

В частности, метрика на $\mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right]^{1/2} .$$

Дискретная метрика (заданная на векторном пространстве), не может быть определена никакой нормой. ♠

4.8 Ортогональность.

1. Пусть X — векторное пространство со скалярным произведением $(.,.)$. Элементы x, y этого пространства будем называть ортогональными и писать $x \perp y$, если $(x, y) = 0$.

Пример 4.8.0. *Пусть*

$$x = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3, y = (1, 1, t) \in \mathbb{R}^3,$$

где t — параметр. Найдём условия, при которых $x \perp y$. Из определения скалярного произведения в $\mathbb{R}^3$ следует, что

$$0 = (x, y) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot t = 2 + t.$$

Поэтому x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $t = -2$. ♠

Теорема 4.8.1 *Пусть x, y — ортогональные элементы векторного пространства, на котором определено скалярное произведение $(.,.)$ и норма $\|\cdot\|$, определяемая этим скалярным произведением. Тогда справедливо равенство ("теорема Пифагора"):*

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Лемма 4.8.1 *Пусть X — векторное пространство со скалярным произведением $(.,.)$. Тогда*

1. *$x \perp x$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;*

2. *если $x \perp y$, то $\alpha x \perp \beta y$;*

3. *если $x \perp y$, $z \perp y$, то $(x + z) \perp y$*

для произвольных x, y, z из X и чисел α, β.

Теорема 4.8.2 *Пусть дано семейство $X_1, \ldots, X_s$ ненулевых элементов векторного пространства, на котором задано скалярное произведение $(.,.)$. Предположим, что для элементов этого семейства выполняются следующее условие:*

$$X_i \perp X_j, \text{ для произвольных } i = 1, \ldots, s,\ j = 1, \ldots, s,\ i \neq j.$$

Тогда семейство $X_1, \ldots, X_s$ линейно независимо.

Если выполняются условия теоремы 4.8.2, то говорят, что элементы семейства $X_1, \ldots, X_s$ образуют ортогональную систему.

4.9 Ортонормированные базисы

1. Пусть X — конечномерное векторное пространство, на котором задано скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ и норма $\|\cdot\|$, определяемая этим скалярным произведением.

Определение 4.9.1 *Векторный базис $F_1, \ldots, F_n$ называют ортогональным, если $(F_j, F_k) = 0$, если $j, k = 1, \ldots, n$ и $j \neq k$, Если, кроме того, $\|F_j\| = 1$ для произвольного $j = 1, \ldots, n$, то этот базис называют ортонормированным.*

Пример 4.9.0. *Семейство $E_1, \ldots, E_n$ будет ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^n$.* ♠

Теорема 4.9.1 *Пусть $F_1, \ldots, F_n$ — ортонормированный базис в X. Тогда для произвольного $x \in X$ имеет место разложение*

$$x = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_n F_n,$$

в которых коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (называемые координатными коэффициентами) находятся по следующим формулам:

$$\alpha_j = (x, F_j), j = 1, \ldots, n.$$

Теорема 4.9.2 *Во всяком нетривиальном конечномерном векторном пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис.*

Процедура ортогонализации Шмидта

Дано: Пусть X — конечномерное векторное пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\| \cdot \|$, которая определяется этим скалярным произведением, и векторный базис $X_1, \ldots, X_n$.

1-ый шаг. Пусть $k = 1$. Положим $Y_1 = X_1$.

2-ой шаг. Увеличиваем значение k на единицу. Предположим, что уже построены ненулевые векторы $Y_1, \ldots, Y_{k-1}$ такие, что $(Y_j, Y_i) = 0$, $i, j = 1, \ldots, k-1$, $i \neq j$;

3-ий шаг. Положим $Y_k = X_k - \lambda_1 Y_1 - \cdots - \lambda_{k-1} Y_{k-1}$. Коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ находятся из условия ортогональности $Y_k \perp Y_j$, $j = 1, \ldots, k-1$:

$$(Y_k, Y_j) = (X_k, Y_j) - \lambda_j (Y_j, Y_j) = 0, j = 1, \ldots, k-1.$$

4-ый шаг. Если $k = n$, то семейство $Y_1, \ldots, Y_n$ будет ортогональным базисом в X. Для построения искомого ортонормированного базиса остаётся пронормировать векторы $Y_1, \ldots, Y_n$:

$$F_1 := \frac{1}{\|Y_1\|} Y_1, F_2 := \frac{1}{\|Y_2\|} Y_2, \ldots F_n := \frac{1}{\|Y_n\|} Y_n.$$

Иначе переходи на 2-ой шаг.

Пример 4.9.1. *Применим алгоритм ортогонализации к системе векторов*

$$X_1 = (1, 1, 0, 0)^T, X_1 = (0, 1, 1, 0)^T, X_1 = (0, 0, 1, 1)^T, X_1 = (0, 0, 0, 1)^T.$$

Пусть $k = 1$. Положим $Y_1 = X_1 = (1, 1, 0, 0)^T$.

Пусть $k = 2$. *Положим* $Y_2 = X_2 - \lambda Y_1 = (-\lambda, 1 - \lambda, 1, 0)^T$. *Число* λ *находим из условия ортогональности* $Y_1 \perp Y_2$*:*

$$0 = (Y_1, Y_2) = 1 \cdot (-\lambda) + 1 \cdot (1 - \lambda) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1 - 2\lambda, \lambda = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $Y_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0)$.

Пусть $k = 3$. *Положим*

$$Y_3 = X_3 - \lambda Y_1 - \mu Y_2 = (-\lambda + \frac{1}{2}\mu, -\lambda - \frac{1}{2}\mu, 1 - \mu, 1)^T.$$

Числа λ, μ *находим из условий ортогональности* $Y_1 \perp Y_3$, $Y_2 \perp Y_3$*:*

$$\begin{gathered} 0 = (Y_1, Y_3) = (Y_1, X_3) - \lambda(Y_1, Y_1) = 0 - 2\lambda, \lambda = 0. \\ 0 = (Y_2, Y_3) = (Y_2, X_3) - \mu(Y_2, Y_2) = 1 - \frac{3}{2}\mu, \mu = \frac{2}{3}. \end{gathered}$$

Следовательно, $Y_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$.

Пусть $k = 4$. *Положим*

$$\begin{gathered} Y_4 = X_4 - \lambda Y_1 - \mu Y_2 - \nu Y_3 = \\ = (-\lambda + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{3}\nu, -\lambda - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3}\nu, -\mu + \frac{1}{3}\nu, 1 - \nu)^T. \end{gathered}$$

Числа λ, μ, ν *находим из условий ортогональности* $Y_1 \perp Y_4$, $Y_2 \perp Y_4$, $Y_3 \perp Y_4$*:*

$$\begin{gathered} 0 = (Y_1, Y_4) = (Y_1, X_4) - \lambda(Y_1, Y_1) = 0 - 2\lambda, \lambda = 0; \\ 0 = (Y_2, Y_4) = (Y_2, X_4) - \mu(Y_2, Y_2) = 0 - \frac{3}{2}\mu, \mu = \frac{2}{3}; \\ 0 = (Y_3, Y_4) = (Y_3, X_4) - \nu(Y_3, Y_3) = 1 - \frac{4}{3}\nu, \mu = \frac{3}{4}. \end{gathered}$$

Следовательно, $Y_4 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Если пронормировав получившиеся векторы Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, получаем искомый ортонормированный базис:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{\|Y_1\|}Y_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)^T,\\
F_2 &= \frac{1}{\|Y_2\|}Y_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0)^T,\\
F_3 &= \frac{1}{\|Y_3\|}Y_3 = (\frac{\sqrt{12}}{12}, -\frac{\sqrt{12}}{12}, \frac{\sqrt{12}}{3}, 0)^T,\\
F_4 &= \frac{1}{\|Y_4\|}Y_4 = (-\frac{\sqrt{4}}{4}, \frac{\sqrt{4}}{4}, -\frac{\sqrt{4}}{4}, \frac{\sqrt{4}}{4})^T.
\end{aligned}$$

♠
Пример 4.9.2. *Постройте ортогональный базис в пространстве решений однородной системы уравнений*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & 0\\
5x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 7x_5 & = & 0\\
x_1 & - & 5x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0\\
4x_1 & - & 7x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 5x_5 & = & 0
\end{array}\right. . \tag{20}$$

Ранее (на странице 47) была построена фундаментальная системы решений этой системы:

$$X_1 = (5, 1, 0, 13, 0)^T; X_2 = (0, 0, 1, 2, 0)^T; X_3 = (-1, 0, 0, 1, 1)^T. \tag{21}$$

Для построения искомого ортонормированного базиса, применим к семейству векторов (21) процедуру ортогонализации Шмидта.

Пусть $k = 1$. Положим $Y_1 = F_1 = X_1 = (5, 1, 0, 13, 0)^T$.

Пусть $k = 2$. Положим $Y_2 = F_2 - \lambda Y_1$. Число λ находим из условия ортогональности $Y_1 \perp Y_2$:

$$0 = (Y_2, Y_1) = (F_2, Y_1) - \lambda(Y_1, Y_1) = 26 - 195\lambda, \lambda = \frac{2}{15}.$$

Следовательно, $Y_2 = (-\frac{2}{3}; -\frac{2}{15}; 1; \frac{4}{15}; 0)^T$.

Пусть $k = 3$. Положим $Y_3 = F_3 - \lambda Y_1 - \mu Y_2$. Числа λ, μ находим из условия ортогональности $Y_1 \perp Y_3$, $Y_2 \perp Y_3$:

$$\begin{aligned}
0 = (Y_3, Y_1) = (F_3, Y_1) - \lambda(Y_1, Y_1) = 8 - 195\lambda, \lambda = \frac{8}{195};\\
0 = (Y_3, Y_2) = (F_3, Y_2) - \lambda(Y_2, Y_2) = -7 - \frac{345}{4}\mu, \lambda = -\frac{28}{345}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $Y_3 = (-\frac{239}{299}, \frac{12}{299}, -\frac{14}{23}, \frac{7}{23}, 1)^T$. ♠

5 Задачи

5.1 Определители

1. Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & 2x \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 11 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 8 \\ 9 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 8 & 11 & -3 \\ -1 & 6 & 9 \\ -2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

2. Вычислите определитель, разлагая его по строке или столбцу.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & -4 \\ 7 & 0 & 8 & 6 \\ -5 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & x & 1 \\ 6 & 8 & y & -4 \\ 2 & 11 & z & 7 \\ 1 & -1 & t & 3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 8 & 6 & a & 3 \\ 4 & 2 & b & -1 \\ -1 & 4 & c & 2 \\ 3 & 1 & d & 5 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 8 & 9 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -7 & 3 \\ x & y & z & t \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 6 \\ -3 & -2 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -5 & 7 \\ 6 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 8 & 11 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

3. Вычислить определители, применяя элементарные преобразования строк или столбцов матрицы:

$$1.\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad 2.\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \qquad 3.\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$4.\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad 5.\ \begin{vmatrix} 6 & 17 & 11 & 3 \\ 19 & 17 & 13 & 14 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 17 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad 6.\ \begin{vmatrix} 5 & -7 & 8 & 14 \\ 6 & -7 & 10 & 15 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$7.\ \begin{vmatrix} -5 & -6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 7 & 5 \\ 8 & 10 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \qquad 8.\ \begin{vmatrix} 23 & 22 & 21 & 20 \\ 22 & 21 & 20 & 19 \\ 21 & 20 & 19 & 18 \\ 20 & 19 & 18 & 17 \end{vmatrix}$$

$$9.\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 5 \\ 4 & 3 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 7 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} \quad 10.\ \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

4. Вычислите определители и решите получившееся уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 2 & 3 \\ -1 & x & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & x & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & x & 5 \\ x & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 4 & x & 4 \\ 4 & 5 & x \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & x & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -x & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & -x & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -2 & x \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5.2 Операции с матрицами

1. Вычислите заданные выражения:

1. $2A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$,
2. $2A + 4B$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,
3. $2B + 6A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ -9 & 7 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
4. $2B - 9A$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 8 & \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 10 & 11 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,
5. $(A^T + B)^T$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & 8 \\ 10 & 11 & -2 & 0 \\ 11 & -2 & 12 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Решите матричные уравнения относительно матрицы X:

1. $3A - 2X + 5B = 0$, если
$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$,
2. $3A + 2X + 5B = 4A - 2X - B$, если
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 7 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$,
3. $3A + 2X + 5B^T = 4A^T - 2X - B$, если
$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & -8 \\ -10 & 12 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$,

3. Найти произведение матриц:

1. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 6 & 9\end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6 & 0\\ 1 & 4 & -3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ 6 & 8 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 2\\ 5 & 8 & 7\end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix}6 & 8 & -4\\ 5 & 7 & 9\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 8 & 6\end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix}8 & 7 & -5\\ 6 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 8 & 9\\ 4 & 5 & 6\\ -5 & -2 & -1\end{pmatrix}$

4. Вычислите заданные выражения:

5. $A^TX - X^TA$, если $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}$,

6. $X(X+A)^T$, если $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & t\\ 0 & 0 & x & 0\\ 0 & y & 0 & 0\\ z & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

5. Найти обратную матрицу:

1. $\begin{pmatrix}4 & 9\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}4 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix}3 & 6 & 1\\ 2 & -2 & 5\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix}-2 & 5 & 3\\ -4 & 2 & 5\\ 3 & 5 & -3\end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & -2\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ -3 & 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$

6. Степени A^n, $n \in \mathbb{Z}$, матрицы A определяются следующим образом:

1. $A^0 = E$, где E — единичная матрица такого же размера, что и матрица A;
2. если $n \geqslant 1$ и уже найдена матрица A^{n-1}, то $A^n := A^{n-1} \cdot A$;
3. если матрица A обратима и $n > 0$, то по определению $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

Вычислите матричные выражения для заданных матриц (в которых $n \in \mathbb{Z}$):

1. $A^n, n \geqslant; 1 \qquad A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix},$
2. $A^n; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$
3. $A^3; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$
4. $A^k, k = -2, 2; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$
5. $A^k, k = -2, 2; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix};$
6. $A^k, k = -2, 2; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

7. Вычислите матричные выражения:

1. $X^2+2AX+A^2$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & y \end{pmatrix}$;
2. $XAX-AXA$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$;
3. X^2A-XAX, если $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} 2 & x \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;
4. $A(X-A)A$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} y & z \\ y & 0 \end{pmatrix}$;

8. Вычислите матричные выражения для заданных матриц:

1. ABA^{-1}, $\quad A=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A^{-1}B-AB^{-1}$, $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$
3. $ABA-BAB$, $\quad A=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
4. A^2BA^{-2}, $\quad A=\begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Решите матричное уравнение:

1.$AX=B$, где $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 9 & 12 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

2.$AX=B$, где $A=\begin{pmatrix} 8 & 7 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & -5 \\ -1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3.$XA=B$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.$XA=B$, где $A=\begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 1 & -3 & 11 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 8 & 7 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

5.$AXA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

5.3 Системы линейных уравнений

1. Решите систему методом Гаусса:

$$1.\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & 6 \end{array}\right.,$$

$$2.\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 6x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & + & 5x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ 14x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 9x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & + & 4x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \end{array}\right.,$$

$$3.\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & + & 6x_5 & = & 2 \\ 15x_1 & + & 30x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & + & 3x_5 & = & -13 \end{array}\right.,$$

$$4.\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}\right.,$$

$$5.\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 13x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & - & 6x_5 & = & 8 \\ 11x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & - & 3x_5 & = & 7 \end{array}\right.,$$

$$6.\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 9x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & + & 9x_5 & = & 0 \\ 8x_1 & + & 4x_2 & + & & & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array}\right.,$$

$$7.\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & + & 6x_5 & = & 2 \\ 15x_1 & + & 30x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & + & 3x_5 & = & -13 \end{array}\right.,$$

$$8.\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 9x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & + & 9x_5 & = & 0 \\ 8x_1 & + & 4x_2 & + & & & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array}\right.,$$

2. Решите системы методом Крамера

$$1.\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -3 \end{array}\right.,$$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -3 \end{cases}$,

3. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 5x_3 = -1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$,

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 = -3 \end{cases}$,

5.4 Векторные базисы

1. Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой. Либо выделите из неё базисную подсистему и разложите по элементам этой системы остальные векторы рассматриваемой системы векторов.

1. $A_1 = (-2, 1, 5, 7)$, $A_2 = (-1, -2, 0, 3)$, $A_3 = (2, 5, 8, 4)$, $A_4 = (3, 6, 2, 1)$;
2. $A_1 = (-3, -1, 2)$, $A_2 = (7, -2, 4)$, $A_3 = (20, -15, 4)$, $A_3 = (42, 14, -28)$, $A_4 = (-12, -4, 8)$;
3. $A_1 = (8, 14, -14)$, $A_2 = (7, 10, -19)$, $A_3 = (5, 14, 7)$, $A_4 = (-4, 0, -1)$, $A_5 = (-3, -4, -3)$, $A_6 = (2, -2, 2)$;
4. $A_1 = (12, 0, 2)$, $A_2 = (-6, 1, -4)$, $A_3 = (9, 2, 6)$, $A_4 = (11, 8, 9)$, $A_5 = (-8, 2, -1)$, $A_6 = (-3, -4, 3)$;
5. $A_1 = (2, 0, 1, 1)$, $A_2 = (-1, 2, 1, 3)$, $A_3 = (-1, 2, 3, 5)$, $A_4 = (0, 0, 1, 1)$;
6. $A_1 = (18, 1, -1, -3)$, $A_2 = (21, 2, 1, 3)$, $A_3 = (12, 3, 4, -12)$, $A_4 = (9, -1, 2, -6)$.
7. $A_1 = (2, -6, -4, -3)$, $A_2 = (4, -26, -8, -21)$, $A_3 = (1, -10, -2, -9)$, $A_4 = (3, -8, -1, -6)$, $A_5 = (-2, -2, -1, -3)$;

2. Решите однородные системы линейных уравнений. Постройте фундаментальную систему векторов в пространстве решений однородной системы линеных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 10x_4 + 13x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 11x_4 + 15x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 8x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 6x_5 = 0 \\ `-x_1 + x_3 + 10x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

3. Решите неоднородные системы линейных уравнений (либо докажите, что система несовместна). Найдите общее решение неоднородной системы линейных уравнений в векторной форме

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_4 + 8 = 1 \\ - x_2 + x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_5 = 3 \\ -x_1 - x_3 - x_5 = 4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 + 4x_5 = 1 \\ - 3x_2 + 3x_3 - 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 - 12x_4 + 15x_5 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 - 16x_4 + 20x_5 = 0 \end{cases}$$

4. Примените процедуру ортогонализации к следующим семействам векторов

1. $A_1 = (0,0,2,-1)^T$, $A_2 = (0,1,2,1)^T$, $A_3 = (0,1,-2,-1)^T$, $A_4 = (1,-2,0,-5)^T$;
2. $A_1 = (2,1,-2,1)^T$, $A_2 = (-3,-2,4,1)^T$, $A_3 = (1,0,6,2)^T$, $A_4 = (2,3,-1,4)^T$;
3. $A_1 = (1,1,1,0)^T$, $A_2 = (0,1,1,1)^T$, $A_3 = (0,0,1,1)^T$, $A_4 = (0,0,0,1)^T$;
4. $A_1 = (1,0,0,0,1)^T$, $A_2 = (0,1,1,1,0)^T$, $A_3 = (0,0,1,0,0)^T$, $A_4 = (1,1,1,1,1)^T$;
5. фундаментальная система векторов в пространствах решений однородных систем линейных уравнений из задачи 2 этого раздела.

6 Рекомендуемая литература

Рекомендуемая литература

- Общий курс высшей математики для экономистов. Под редекцией В. И. Ерамкова // М., ИНФРА-М, 2008.

- Сборник задач по высшей математике для экономистов (учебное пособие). Под редекцией В. И. Ерамкова // М., ИНФРА-М, 2008.

- Жолков С. Ю. Математика и информатика для гуманитариев. М.: Альфа-М, Инфра-М.- 2005 г.

- Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов // М.: ФИЗМАТЛИТ.-2004.- 464

- Грес П. В. Математика для гуманитариев: учебное пособие // М.: Логос, 2003. – С. 33–45.

- Турецкий В. Я. Математика и информатика /3-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2002. (Серия «Высшее образование») – С. 22–35.

- Кряквин В. Д. Линейная алгебра. Пособие к решению задач и большая колекция вариантов заданий // изд. предпр "Вузовская книга".- 2004.- 519 с.