МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. Абанин, Д.А. Полякова

ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
для студентов первого курса
Института математики, механики и компьютерных наук
имени И.И. Воровича

Ростов-на-Дону
2015

Учебно-методическое пособие разработано на кафедре математического анализа доктором физико-математических наук, профессором А.В. Абаниным и кандидатом физико-математических наук, доцентом Д.А. Поляковой.

Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук Ю.С. Налбандян

Компьютерный набор и верстка канд. физ.-мат. наук Д.А. Полякова

Введение

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса Института математики, механики и компьютерных наук, обучающихся по специальностям «Математика», «Механика и математическое моделирование», «Прикладная математика», «Информационные технологии». Может быть использовано при проведении практических занятий по математическому анализу, а также для самостоятельной работы студентов.

Пособие состоит из двух глав, первая из которых посвящена исследованию функций многих переменных на безусловный экстремум, а вторая — на условный экстремум. Обе главы содержат в краткой форме весь необходимый теоретический материал и два блока заданий — Часть I и Часть II. Каждое задание Части II аналогично соответствующему заданию Части I. Задания Части I приводятся с подробными решениями, их целесообразно использовать для аудиторной работы или самостоятельного разбора. Задания Части II предназначены для домашней работы студентов.

1 Безусловный экстремум

1.1 Необходимые теоретические сведения

Определение 1. *Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}$. Точка $M_0 \in G$ называется точкой локального максимума функции f, если имеется $\delta > 0$ такое, что*

$$f(M_0 + \Delta x) \leqslant f(M_0) \text{ для всех } \Delta x \text{ с } \|\Delta x\| < \delta\,. \tag{1}$$

Соответственно, M_0 называется точкой локального минимума, если

$$f(M_0 + \Delta x) \geqslant f(M_0) \text{ для всех } \Delta x \text{ с } \|\Delta x\| < \delta\,. \tag{2}$$

Здесь под $\|\Delta x\|$ можно понимать любую из стандартных норм в $\mathbb{R}^n$ — в частности, $\|\Delta x\| = \max\{|\Delta x_j| : 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Величина $\delta > 0$ предполагается настолько малой, что $M_0 + \Delta x \in G$ при любом приращении Δx с $\|\Delta x\| < \delta$.

В случае, если

$$f(M_0 + \Delta x) < f(M_0) \text{ при любых } 0 < \|\Delta x\| < \delta\,,$$

или

$$f(M_0 + \Delta x) > f(M_0) \text{ при любых } 0 < \|\Delta x\| < \delta\,,$$

говорят о *строгом* локальном максимуме или минимуме.

Неравенства (1) и (2) можно переписать, соответственно, в виде

$$\Delta f_{M_0}(\Delta x) \leqslant 0\,, \text{ если } \|\Delta x\| < \delta\,, \tag{3}$$

$$\Delta f_{M_0}(\Delta x) \geqslant 0\,, \text{ если } \|\Delta x\| < \delta\,. \tag{4}$$

Здесь, как обычно, $\Delta f_{M_0}(\Delta x) = f(M_0+\Delta x) - f(M_0)$ — приращение функции f в точке M_0, соответствующее приращению аргумента Δx.

Точки локальных максимумов и локальных минимумов называются *точками локальных экстремумов*, а значения функции в этих точках — *экстремальными значениями.*

Сформулируем необходимое условие локального экстремума функции многих переменных.

Теорема 1. *Если M_0 — точка локального экстремума функции f, то частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(M_0)$ либо равна 0, либо не существует, $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Таким образом, точки локального экстремума функции f следует искать среди *критических точек*, т. е. среди тех внутренних точек области определения, где либо все частные производные первого порядка равны 0, либо какие-то из них не существуют, а остальные равны 0. Точки, в которых все частные производные равны 0

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(M_0) = 0\,,\ 1 \leqslant j \leqslant n\,,$$

называются *стационарными точками* функции f.

Ясно, что, как и в случае функций одной переменной, для функций многих переменных не всякая критическая точка является точкой экстремума. Соответственно, найденные критические точки нужно дополнительно исследовать на наличие или отсутствие локального экстремума.

Заметим сразу, что если функция f не имеет каких-либо частных производных первого порядка в точке M_0 (т. е. если M_0 — критическая, но не стационарная точка функции f), то исследование на экстремум в точке M_0 проводится, как правило, по определению, т. е. через изучение знака приращения $\Delta f_{M_0}(\Delta x)$:

— если приращение имеет определенный знак при достаточно малых Δx, т. е. если выполняется одно из неравенств (3) или (4), то M_0 — точка локального максимума или, соответственно, минимума функции f;

— если же приращение меняет знак, т. е. если для любого $\delta > 0$ существуют Δx^1 и Δx^2 с $\|\Delta x^1\| < \delta$, $\|\Delta x^2\| < \delta$, для которых

$$\Delta f_{M_0}(\Delta x^1) > 0\,,\ \Delta f_{M_0}(\Delta x^2) < 0\,,$$

то M_0 не является точкой локального экстремума функции f.

Тот же метод обычно применяется для исследования функции f в ее стационарной точке M_0, если f не является дважды дифференцируемой в точке M_0.

Для дважды дифференцируемых функций имеются достаточные условия локального экстремума. Итак, пусть M_0 — стационарная точка функции f, причем f p раз ($p \geqslant 2$) непрерывно дифференцируема в точке M_0. Выпишем для функции f в точке M_0 формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано порядка 2 и порядка p:

$$\Delta f_{M_0}(\Delta x) = \frac{1}{2}\, d^2 f_{M_0}(\Delta x) + o(\|\Delta x\|^2)\,,\ \Delta x \to 0\,; \tag{5}$$

$$\Delta f_{M_0}(\Delta x) = \frac{1}{2}\, d^2 f_{M_0}(\Delta x) + \dots + \frac{1}{p!}\, d^p f_{M_0}(\Delta x) + o(\|\Delta x\|^p)\,,\ \Delta x \to 0\,. \tag{6}$$

На основании равенства (5) доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть M_0 — стационарная точка функции f, причем f дважды непрерывно дифференцируема в точке M_0.*

1) Если $d^2 f_{M_0}(\Delta x) > 0$ при всех $\Delta x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то M_0 — точка локального минимума функции f.

2) Если $d^2 f_{M_0}(\Delta x) < 0$ при всех $\Delta x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то M_0 — точка локального максимума функции f.

3) Если $d^2 f_{M_0}(\Delta x)$ принимает в $\mathbb{R}^n$ значения разных знаков, то точка M_0 не является точкой локального экстремума функции f.

Замечание 1. Легко видеть, что условия 1) и 2) обеспечивают наличие строгого локального минимума или, соответственно, максимума в точке M_0.

Замечание 2. В случае 3), когда $d^2 f_{M_0}(\Delta x)$ принимает в $\mathbb{R}^n$ значения разных знаков, точка M_0 называется *седловой точкой* функции f.

Замечание 3. Помимо случаев 1)–3), еще возможны ситуации, когда $d^2 f_{M_0}(\Delta x) \geqslant 0$ либо $d^2 f_{M_0}(\Delta x) \leqslant 0$ всюду в $\mathbb{R}^n$, но при этом $d^2 f_{M_0}(\Delta x)$ обращается в 0 при каких-то ненулевых приращениях Δx. Тогда необходимо изучать знак приращений $\Delta f_{M_0}(\Delta x)$ функции f в точке M_0, соответствующих данным приращениям Δx. Делать это можно либо непосредственно, либо через знаки дифференциалов более высоких порядков на основании равенства (6).

Условия 1), 2) и 3) Теоремы 2 означают соответственно, что симметричная квадратичная форма $d^2 f_{M_0}(\Delta x)$ является положительно определенной, отрицательно определенной и неопределенной. Если ввести матрицу данной формы

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}\,, \quad a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\,,\ 1 \leqslant i \leqslant n\,,\ 1 \leqslant j \leqslant n\,,$$

то известный критерий Сильвестра позволяет судить об определенности формы по поведению главных миноров

$$A_1 = a_{11}\,,\ A_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\,,\ \ldots\,,\ A_n = \det A \tag{7}$$

матрицы A. Именно,

1) форма $d^2 f_{M_0}(\Delta x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры (7) положительны;

2) форма $d^2 f_{M_0}(\Delta x)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда главные миноры (7) меняют знак, начиная с «-»;

3) если все главные миноры отличны от 0 и имеют не такие знаки, как в пунктах 1) и 2), то форма $d^2 f_{M_0}(\Delta x)$ является неопределенной.

В случае, если хотя бы один из главных миноров $A_1, \ldots, A_n$ равен 0, второй дифференциал $d^2 f_{M_0}(\Delta x)$ может оказаться как неопределенной, так и полуопределенной формой (полуопределенные формы описаны в Замечании 3 к Теореме 2).

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в стационарной точке M_0; $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$; $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$.*

1) Если все главные миноры (7) матрицы A положительны, то M_0 — точка локального минимума функции f.

2) Если главные миноры (7) меняют знак, начиная с «-», т. е. если $\operatorname{sgn} A_k = (-1)^k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, то M_0 — точка локального максимума функции f.

3) Если все главные миноры отличны от 0 и имеют другие знаки, чем в пунктах 1) и 2), то M_0 не является точкой локального экстремума функции f.

В случае функции двух переменных результат Теоремы 3 можно усилить. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функция $f = f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$,*

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\,,\ a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\,,\ a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)\,.$$

1) Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то M_0 — точка локального экстремума функции f: минимума, если $a_{11} > 0$, и максимума, если $a_{11} < 0$.

2) Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то M_0 не является точкой локального экстремума функции f.

Замечание. Уточнение содержится в пункте 2), где допускается, что первый главный минор a_{11} может обратиться в 0. Именно, известно, что если $a_{11} = 0$, то $d^2 f_{M_0}(\Delta x, \Delta y)$ будет неопределенной формой. Случай, когда выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, т. е. второй главный минор, обращается в 0, требует дополнительного исследования.

Наконец, приведем для удобства формулировку Теоремы 3 для функций трех переменных.

Теорема 5. *Пусть функция $f = f(x, y, z)$ дважды непрерывно дифференцируема в стационарной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$,*

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\,,\ a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\,,\ a_{33} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M_0)\,,$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)\,,\ a_{13} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(M_0)\,,\ a_{23} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(M_0)\,,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\,,\ A_1 = a_{11}\,,\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\,,\ A_3 = \det A\,.$$

1) Если все главные миноры матрицы A положительны, т. е. если $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0$, то M_0 — точка локального минимума функции f.

2) Если главные миноры матрицы A меняют знак, начиная с «-», т. е. если $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$, то M_0 — точка локального максимума функции f.

3) Если все главные миноры отличны от 0 и имеют другие знаки, чем в пунктах 1) и 2), то M_0 не является точкой локального экстремума функции f.

Замечание. Случай, когда хотя бы один из главных миноров A_1, A_2, A_3 обращается в 0, требует дополнительного исследования.

1.2 Задачи

Часть I

Исследовать на экстремум функцию двух переменных:

1-I. $f(x, y) = -x^2 - xy - y^2 + x + y$.

2-I. $f(x, y) = (x - y + 1)^2$.

3-I. $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

4-I. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

5-I. $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

6-I. $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

7-I. $f(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4$.

8-I. $f(x, y) = 3x^2y + 3x^2 + y^3 + 3y^2 - 27y - 18x$.

9-I. $f(x, y) = x^2 + 3xy - 8\ln x - 6\ln y$.

10-I. $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

11-I. $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$.

12-I. $f(x, y) = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$.

Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

13-I. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

14-I. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^2 + 3xy - 2z - 6x - 6y$.

15-I. $f(x, y, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

16-I. $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + xy + 2z^2 - 2xz + 3y - 1$.

17-I. $f(x, y, z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$.

18-I. $f(x, y, z) = z\ln z - z - z\ln xy + xy + x^2 - 4x + y^3 - 9y^2 + 15y$.

19-I. $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.

20-I*. $f(x, y, z) = yx^3z^2(2 - y - 2z - 3x)$.

Часть II

Исследовать на экстремум функцию двух переменных:

1-II. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y.$

2-II. $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2.$

3-II. $f(x,y) = (1+x^2)\sqrt[3]{y}.$

4-II. $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}\ \ (x > 0\,,\ y > 0).$

5-II. $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2.$

6-II. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6x - 6y.$

7-II. $f(x,y) = xy^2 + 2x^3 + 5x^2 + y^2.$

8-II. $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y.$

9-II. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y.$

10-II. $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$, $x \in (0,\pi)$, $y \in (0,\pi)$.

11-II. $f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}.$

12-II. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2).$

Исследовать на экстремум функцию трех переменных:

13-II. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$

14-II. $f(x,y,z) = z^3 - x^2 + 3y^2z - 2x - 12y - 15z.$

15-II. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + z^2\,,\ x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0.$

16-II. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - xy + 6z^3 - 3xz + 3yz.$

17-II. $f(x,y,z) = 3xy^2 + x^3 - 15x - 12y + z^2 - 2z + 2.$

18-II. $f(x,y,z) = x\ln x - x - x\ln yz + zy + z^3 - \dfrac{9}{2}z^2 + 6z + 2y^2 - 2y.$

19-II. $f(x,y,z) = \ln xy - z(x-y) - x^2 - y^2 + 2xy - y.$

20-II*. $f(x,y,z) = xyz(1-x-y-z).$

1.3 Решение задач Части I

1-I. Функция $f(x,y) = -x^2 - xy - y^2 + x + y$ непрерывно дифференцируема любое число раз в $\mathbb{R}^2$ как многочлен. Поэтому точками возможного локального экстремума функции f являются только стационарные точки. Найдем их. Т. к.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x - y + 1\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x - 2y + 1\,,$$

то имеем систему

$$\begin{cases} -2x - y + 1 = 0 \\ -x - 2y + 1 = 0 \end{cases},$$

единственным решением которой является точка $M_0\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Находим частные производные второго порядка функции f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1\,.$$

Следовательно,

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = -2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = -2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = -1\,.$$

Значит, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 4 - 1 = 3 > 0$. Т. к. при этом $a_{11} < 0$, то $M_0\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ — точка локального максимума функции f. Экстремальное значение функции f равно:

$$f(M_0) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

2-I. Как и в Задаче 1-I, для данной функции $f(x,y) = (x - y + 1)^2$ точками возможного локального экстремума являются только стационарные точки. Найдем их. Имеем, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y + 1)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x - y + 1)\,.$$

Поэтому система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

вырождается в уравнение $x - y + 1 = 0$, решением которого является любая точка $M_0(x_0, x_0 + 1)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Таким образом, у данной функции целая прямая стационарных точек.

Т. к. всюду в $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2\,,$$

то для каждой стационарной точки $M_0(x_0, x_0 + 1)$

$$a_{11} = a_{22} = 2\,, \;\; a_{12} = -2\,,$$

так что $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ и Теорема 4 не дает ответ о наличии экстремума в точке M_0.

Однако нетрудно увидеть, что попытку исследования точки M_0 с помощью частных производных второго порядка вообще можно было не делать. Действительно, легко заметить, что $f(x, y) \geqslant 0$ всюду в $\mathbb{R}^2$, в то время как $f(M_0) = f(x_0, x_0 + 1) = 0$. Значит, каждая точка $M_0(x_0, x_0 + 1)$ является точкой локального минимума функции f. Понятно, что все минимумы нестрогие.

Геометрически поверхность $z = f(x, y)$ представляет собой параболический цилиндр, а прямая $x - y + 1 = 0$ в плоскости $z = 0$, состоящая из стационарных точек, — образующую этого цилиндра.

3-I. Функция $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ определена и непрерывна в $\mathbb{R}^2$. Как известно, функция $\sqrt{t}$ не дифференцируема в точке $t = 0$, в связи с чем функция $\sqrt{x^2 + y^2}$, а значит, и функция f, может не быть дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Для того чтобы убедиться в потере дифференцируемости, рассмотрим разностное отношение

$$\frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = -\frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x} = -\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1\,, \ \Delta x > 0\,, \\ 1\,, \ \Delta x < 0\,. \end{cases}$$

Следовательно, данное разностное отношение не имеет предела при $\Delta x \to 0$, так что f не имеет в точке $(0, 0)$ частной производной по x. То же самое касается и частной производной по y. Значит, $M(0, 0)$ — критическая точка функции f.

В $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ функция f бесконечно дифференцируема. Ее частные производные первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

одновременно в 0 не обращаются. Таким образом, стационарных точек функция f не имеет.

В критической точке $M(0, 0)$ ситуация похожа на Задачу 2-I: $f(0, 0) = 1$, в то время как $f(x, y) < 1$ для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Значит, $M(0, 0)$ —

точка локального максимума функции f. Более того, из приведенной оценки следует, что она является точкой глобального максимума, т. е. $\max\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = f(0,0) = 1$.

4-I. Функция $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ снова является многочленом, так что точками возможного локального экстремума будут только стационарные точки. Находим их. Имеем, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x\,.$$

Решаем систему

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\,,\ y = 0 \\ x = 1\,,\ y = 1 \end{array} \right. .$$

Итак, у нас две стационарные точки $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3\,.$$

Исследуем точки M_1 и M_2 по отдельности.

а) В точке $M_1(0,0)$: $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = -3$. Значит, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -9 < 0$. Следовательно, M_1 не является точкой локального экстремума функции f.

б) В точке $M_2(1,1)$: $a_{11} = a_{22} = 6$, $a_{12} = -3$, так что $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36 - 9 = 27 > 0$. Учитывая, что $a_{11} > 0$, заключаем, что M_2 — точка локального минимума функции f. При этом $f(M_2) = f(1,1) = 1 + 1 - 3 = -1$.

5-I. Функция $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ непрерывно дифференцируема любое число раз в $\mathbb{R}^2$, так что множество точек возможного локального экстремума совпадает со множеством стационарных точек. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y\,,$$

то имеем систему:

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x - y = 0 \\ 2y^3 - x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2y^3 = 0 \\ 2x^3 - x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x \\ 2x^3 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\,,\ y = 0 \\ x = 1\,,\ y = 1 \\ x = -1\,,\ y = -1 \end{array} \right. .$$

Итак, у рассматриваемой функции три стационарные точки $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$ и $M_3(-1,-1)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2\,.$$

а) В точке $M_1(0,0)$: $a_{11} = a_{22} = -2$, $a_{12} = -2$, так что $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, т. е. в данной точке необходимо проводить дополнительное исследование. Сначала изучим две другие стационарные точки.

б) В точке $M_2(1,1)$: $a_{11} = a_{22} = 10$, $a_{12} = -2$. Значит, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 100 - 4 = 96 > 0$. Учитывая, что $a_{11} > 0$, заключаем, что M_2 — точка локального минимума функции f. Соответствующее экстремальное значение:

$$f(M_2) = f(1,1) = 1 + 1 - 1 - 2 - 1 = -2\,.$$

в) Нетрудно видеть, что в точке $M_3(-1,-1)$ никаких изменений по сравнению с точкой M_2 не будет, т. е. она также является точкой локального минимума функции f.

Вернемся к исследованию точки $M_1(0,0)$. Рассмотрим приращение функции f в этой точке:

$$\Delta f_{M_1}(\Delta x, \Delta y) = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0,0) =$$
$$= \Delta x^4 + \Delta y^4 - \Delta x^2 - 2\Delta x \Delta y - \Delta y^2 = \Delta x^4 + \Delta y^4 - (\Delta x + \Delta y)^2\,.$$

Итак, приращение состоит из двух частей: неотрицательной $\Delta x^4 + \Delta y^4$ и неположительной $-(\Delta x + \Delta y)^2$. Ясно, что при малых Δx и Δy вторая составляющая подавляет первую, т. е. в целом приращение будет отрицательным. Исключение составляет случай, когда вторая составляющая зануляется, т. е. когда $\Delta y = -\Delta x$. При этом первая составляющая даст положительное приращение функции. Приведенные рассуждения говорят о том, что приращение $\Delta f_{M_1}(\Delta x, \Delta y)$ может принимать значения разных знаков. Более точно это выглядит следующим образом:

$$\Delta f_{M_1}(\Delta x, 0) = \Delta x^4 - \Delta x^2 = \Delta x^2(\Delta x^2 - 1) < 0 \text{ для всех } \Delta x : 0 < |\Delta x| < 1\,;$$
$$\Delta f_{M_1}(\Delta x, -\Delta x) = 2\Delta x^4 > 0 \text{ для всех } \Delta x \neq 0\,.$$

Таким образом, функция f не имеет экстремума в точке $M_1(0,0)$.

Можно было провести исследование точки M_1 несколько иначе. Именно, второй дифференциал функции f в точке M_1

$$d^2 f_{M_1}(\Delta x, \Delta y) = a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x \Delta y + a_{22}\Delta y^2 = -2\Delta x^2 - 4\Delta x \Delta y - 2\Delta y^2 =$$
$$= -2(\Delta x + \Delta y)^2$$

является полуопределенной квадратичной формой. Именно, $d^2 f_{M_1}(\Delta x, \Delta y) \leqslant 0$ всюду в $\mathbb{R}^2$, но при этом присутствует направление $\Delta y = -\Delta x$, на котором второй дифференциал обращается в 0. На всех направлениях, кроме указанного, $d^2 f_{M_1}(\Delta x, \Delta y) < 0$, так что по формуле (5) на них $\Delta f_{M_1}(\Delta x, \Delta y) < 0$ при достаточно малых Δx, Δy.

При $\Delta y = -\Delta x$ имеем, что $\Delta f_{M_1}(\Delta x, -\Delta x) = 2\Delta x^4 > 0$, $\Delta x \neq 0$. Соответственно, M_1 не является точкой локального экстремума функции f.

Достоинство второго способа состоит в том, что он явно выделяет приращения $(\Delta x, \Delta y)$, которые необходимо рассматривать отдельно.

6-I. Функция $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ непрерывно дифференцируема любое число раз в $\mathbb{R}^2$. Найдем стационарные точки этой функции. Т. к.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 2x\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y\,,$$

то имеем систему:

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4x^2 - 1) = 0 \\ y(y^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \pm 1 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Решениями этой системы будут всевозможные комбинации найденных значений x и y:

$$M_1(0,0)\,,\ M_{2,3}(0,\pm 1)\,,\ M_{4,5}\Big(\pm\frac{1}{2}, 0\Big)\,,\ M_{6,7}\Big(\frac{1}{2}, \pm 1\Big)\,,\ M_{8,9}\Big(-\frac{1}{2}, \pm 1\Big)\,.$$

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 - 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0\,.$$

а) В точке $M_1(0,0)$

$$a_{11} = -2\,,\ a_{22} = -4\,,\ a_{12} = 0 \ \text{ и } \ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 8 > 0\,.$$

Значит, $M_1(0,0)$ — точка локального максимума функции f. Соответствующее экстремальное значение $f(M_1) = f(0,0) = 0$.

б) В точках $M_{2,3}(0,\pm 1)$

$$a_{11} = -2\,,\ a_{22} = 8\,,\ a_{12} = 0\,;\ \ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -16 < 0\,,$$

так что в соответствии с Теоремой 4 эти точки не являются точками локального экстремума функции f.

в) Для $M_{4,5}\Big(\pm\dfrac{1}{2}, 0\Big)$

$$a_{11} = 4\,,\ a_{22} = -4\,,\ a_{12} = 0 \ \text{ и } \ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -16 < 0\,.$$

Значит, эти точки также не являются точками локального экстремума функции f.

г) Нетрудно видеть, что т. к. частные производные второго порядка зависят от x^2 и y^2, то исследование точек $M_{6,7}$ и $M_{8,9}$ можно проводить вместе. В данных точках

$$a_{11} = 4\,,\ a_{22} = 8\,,\ a_{12} = 0\ \text{ и }\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 32 > 0\,,$$

так что все эти точки являются точками локального минимума функции f. При этом

$$f(M_{6-9}) = f\Big(\frac{1}{2}, \pm 1\Big) = f\Big(-\frac{1}{2}, \pm 1\Big) = 2 \cdot \frac{1}{16} + 1 - \frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{8}\,.$$

7-I. Множество критических точек заданной функции $f(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4$ снова совпадает со множеством ее стационарных точек. Т. к.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 3x^2\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3\,,$$

то получаем систему:

$$\begin{cases} 3x(2y - x) = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases},$$

которая распадается на две системы:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases};$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} x = 2y \\ 12y^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y^2(3 - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0\,,\ x = 0 \\ y = 3\,,\ x = 6 \end{array} \right. .$$

Итак, у функции f две стационарные точки $M_1(0, 0)$ и $M_2(6, 3)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y - 6x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x\,.$$

а) В точке $M_1(0, 0)$: $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$, так что Теорема 4 ответа не дает. Рассмотрим приращение функции f в этой точке:

$$\Delta f_{M_1}(\Delta x, \Delta y) = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = 3\Delta x^2 \Delta y - \Delta x^3 - \Delta y^4\,.$$

Нетрудно видеть, что $\Delta f_{M_1}(\Delta x, 0) = -\Delta x^3$ больше нуля, если $\Delta x < 0$, и, наоборот, меньше нуля, если $\Delta x > 0$. Это означает, что у функции f нет экстремума в точке M_1.

б) В точке $M_2(6,3)$

$$a_{11} = -6 \cdot 3\,,\ a_{22} = -12 \cdot 3^2 = -6^2 \cdot 3\,,\ a_{12} = 6^2\,,$$

так что $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 6^3 \cdot 3^2 - 6^4 = 6^3(9-6) = 3 \cdot 6^3 > 0$. Т. к. $a_{11} < 0$, то M_2 — точка локального максимума функции f. Экстремальное значение

$$f(M_2) = f(6,3) = 3 \cdot 6^2 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 3 \cdot 6^2(3-2) - 3^4 = 3^3 \cdot 4 - 3^4 = 3^3 = 27\,.$$

8-I. Функция $f(x,y) = 3x^2y + 3x^2 + y^3 + 3y^2 - 27y - 18x$ непрерывно дифференцируема любое число раз в $\mathbb{R}^2$ и

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 6x - 18\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 + 6y - 27\,.$$

Поэтому для нахождения стационарных точек имеем систему:

$$\begin{cases} xy + x - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

Обозначим $y + 1 = t$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} xt - 3 = 0 \\ x^2 + t^2 - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{x} \\ x^2 + \dfrac{9}{x^2} - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{x} \\ x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x^2 = 1 \end{array} \right. \\ t = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3\,,\ t = \pm 1 \\ x = \pm 1\,,\ t = \pm 3 \end{array} \right. .$$

Возвращаясь к исходным переменным x и y, получаем, что у функции f четыре стационарные точки $M_1(3,0)$, $M_2(-3,-2)$, $M_3(1,2)$ и $M_4(-1,-4)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y + 6\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 6\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x\,.$$

а) В точке $M_1(3,0)$

$$a_{11} = a_{22} = 6\,,\ a_{12} = 18\,,\ \ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 6^2 - 18^2 < 0\,,$$

так что M_1 не является точкой локального экстремума функции f.

б) В точке $M_2(-3,-2)$ такая же ситуация, поскольку

$$a_{11} = a_{22} = -6\,,\ a_{12} = -18\,,\ \ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 6^2 - 18^2 < 0\,.$$

в) В точке $M_3(1,2)$

$$a_{11} = a_{22} = 18\,,\ a_{12} = 6 \ \text{ и } \ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 18^2 - 6^2 > 0\,.$$

Следовательно, M_3 — точка локального минимума функции f. При этом

$$f(M_3) = f(1,2) = 6 + 3 + 8 + 12 - 54 - 18 = -43\,.$$

г) Наконец, для $M_4(-1,-4)$ имеем:

$$a_{11} = a_{22} = -18\,,\ a_{12} = -6\,,\ \ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 18^2 - 6^2 > 0\,.$$

Т. к. $a_{11} < 0$, то M_4 — точка локального максимума f;

$$f(M_4) = f(-1,-4) = -12 + 3 - 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 27 \cdot 4 + 18 = 101\,.$$

9-I. Заданная функция $f(x,y) = x^2 + 3xy - 8\ln x - 6\ln y$ определена на множестве $D(f) = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Очевидно, f непрерывно дифференцируема любое число раз на этом множестве, так что множество критических точек совпадает со множеством стационарных. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y - \frac{8}{x}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - \frac{6}{y}\,,$$

то для нахождения стационарных точек имеем систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y - \dfrac{8}{x} = 0 \\ 3x - \dfrac{6}{y} = 0 \\ x > 0\,,\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{y} \\ \dfrac{4}{y} + 3y - 4y = 0 \\ x > 0\,,\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{y} \\ \dfrac{4 - y^2}{y} = 0 \\ x > 0\,,\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Таким образом, у функции f единственная стационарная точка $M(1,2)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{8}{x^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{6}{y^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3\,.$$

Значит, в точке M получаем, что

$$a_{11} = 10\,,\ a_{22} = \frac{3}{2}\,,\ a_{12} = 3 \ \text{ и } \ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 15 - 9 = 6 > 0\,.$$

Т. к. $a_{11} > 0$, то M — точка локального минимума функции f;

$$f(M) = f(1,2) = 1 + 6 - 6\ln 2 = 7 - 6\ln 2\,.$$

10-I. Множество критических точек функции $f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$ совпадает со множеством стационарных. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \sin(x-y)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y + \sin(x-y)\,,$$

то для нахождения стационарных точек имеем систему:

$$\begin{cases} \cos x - \sin(x-y) = 0 \\ \sin y - \sin(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin(x-y) = 0 \\ \sin y = \cos x \end{cases}.$$

Т. к. по условию $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то второе уравнение системы равносильно тому, что $y = \dfrac{\pi}{2} - x$. Таким образом, получаем:

$$\begin{cases} \cos x - \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y = \dfrac{\pi}{2} - x\,,\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x + \cos x = 0 \\ y = \dfrac{\pi}{2} - x\,,\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \\ y = \dfrac{\pi}{2} - x\,,\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{2} - x\,,\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}.$$

Итак, функция f в указанном множестве имеет единственную стационарную точку $M\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x - \cos(x-y)\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos y - \cos(x-y)\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(x-y)\,.$$

В точке M тогда

$$a_{11} = -\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}\,,\ a_{22} = -2\cos\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}\,,\ a_{12} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 - \frac{3}{4} > 0\,.$$

Следовательно, M — точка локального максимума функции f;

$$f(M) = f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,.$$

11-I. Функция $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ определена и бесконечно дифференцируема на множестве $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}\,.$$

Соответственно, для нахождения стационарных точек имеем систему:

$$\begin{cases} y\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}=0 \\ x\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\left(\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\right)=0 \\ x\left(\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}\right)=0 \end{cases}.$$

Если $y=0$, то первое уравнение обращается в равенство, а второе уравнение приобретает вид $x\ln x^2=0$. Значит, решениями системы являются точки $M_{1,2}(\pm 1, 0)$.

Аналогично, при $x=0$ получаем еще две точки $M_{3,4}(0,\pm 1)$.

Пусть теперь $x\neq 0$ и $y\neq 0$. В этом случае рассматриваемая система принимает вид

$$\begin{cases} \ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}=0 \\ \ln(x^2+y^2)+\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2 \\ \ln(x^2+y^2)+\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2=y^2 \\ \ln 2x^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|=|y| \\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}} \end{cases}$$

Таким образом, имеем еще четыре стационарные точки $M_{5,6}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $M_{7,8}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right)$,

Нахождение частных производных второго порядка в данном случае достаточно громоздкое, поэтому найдем непосредственно второй дифференциал функции f:

$$df=(xdy+ydx)\ln(x^2+y^2)+xy\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2xdx+2ydy)\,;$$

$$d^2f=2dx\,dy\cdot\ln(x^2+y^2)+2(xdy+ydx)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2xdx+2ydy)-$$

$$-xy\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot(2xdx+2ydy)^2+xy\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2dx^2+2dy^2)\,.$$

а) В точках $M_{1,2}(\pm 1,0)$ второй дифференциал

$$d^2f_{M_{1,2}}(dx,dy)=(\pm 2)dy\cdot(\pm 2)dx=4dx\,dy\,,$$

очевидно, является неопределенной квадратичной формой, т. к.

$$d^2 f_{M_{1,2}}(dx, \pm dx) = \pm 4dx^2 > (<) 0,\ dx \neq 0\,.$$

Это же заключение можно было сделать и по матрице данной квадратичной формы, которая имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Соответственно, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -4 < 0$. Таким образом, точки $M_{1,2}$ не являются точками локального экстремума функции f.

б) Аналогичная ситуация будет и в точках $M_{3,4}(0, \pm 1)$, поскольку в них также

$$d^2 f_{M_{3,4}}(dx, dy) = (\pm 2)dx \cdot (\pm 2)dy = 4dx\,dy\,.$$

в) В точках $M_{5,6}\Big(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\Big)$ имеем, что $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{e}$, $\ln(x^2 + y^2) = -1$ и, значит,

$$d^2 f_{M_{5,6}}(dx, dy) = -2dx\,dy \pm \frac{2}{\sqrt{2e}} \cdot (dy + dx) \cdot e \cdot \Big(\pm\frac{2}{\sqrt{2e}}\Big) \cdot (dx + dy) -$$

$$-\frac{1}{2e} \cdot e^2 \cdot \Big(\pm\frac{2}{\sqrt{2e}}\Big)^2 \cdot (dx + dy)^2 + \frac{1}{2e} \cdot e \cdot 2(dx^2 + dy^2) =$$

$$= -2dx\,dy + 2(dx+dy)^2 - (dx+dy)^2 + dx^2 + dy^2 = 2(dx^2 + dy^2) > 0\,,\ dx^2 + dy^2 \neq 0\,.$$

По Теореме 2 получаем, что $M_{5,6}$ — точки локального минимума функции f;

$$f(M_{5,6}) = f\Big(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\Big) = -\frac{1}{2e}\,.$$

г) В точках $M_{7,8}\Big(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\Big)$ аналогично имеем, что

$$d^2 f_{M_{7,8}}(dx, dy) = -2(dx^2 + dy^2) < 0\,,\ dx^2 + dy^2 \neq 0\,.$$

Таким образом, $M_{7,8}$ — точки локального максимума функции f;

$$f(M_{7,8}) = f\Big(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\Big) = \frac{1}{2e}\,.$$

12-I. Функция $f(x, y) = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^2$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y} \cdot 2x \cdot (5 - 2x + y) - 2e^{x^2-y}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x^2-y}(5 - 2x + y) + e^{x^2-y}\,.$$

Следовательно, для нахождения стационарных точек имеем систему:

$$\begin{cases} 2x(5-2x+y)-2=0 \\ -(5-2x+y)+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ 5-2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}.$$

Таким образом, функция f имеет единственную стационарную точку $M(1,-2)$.

В данном случае, как и в Задаче 11-I, нахождение частных производных второго порядка функции f достаточно громоздкое, в связи с чем представляется более удобным сразу найти второй дифференциал функции f в точке M:

$$df = e^{x^2-y}(2xdx-dy)(5-2x+y) + e^{x^2-y}(-2dx+dy)\,;$$

$$d^2f = e^{x^2-y}(2xdx-dy)^2(5-2x+y) + e^{x^2-y}\,2dx^2\,(5-2x+y) +$$
$$+2e^{x^2-y}(2xdx-dy)(-2dx+dy)\,;$$

$$d^2f_{(1,-2)}(dx,dy) = e^3(2dx-dy)^2 + e^3\,2dx^2 - 2e^3(2dx-dy)^2 =$$
$$= e^3\big(2dx^2-(2dx-dy)^2\big) = e^3(-2dx^2+4dx\,dy-dy^2)\,.$$

Матрица полученной квадратичной формы без учета e^3 имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Значит, данная форма является неопределенной, так что f не имеет экстремума в точке M.

13-I. Заданная функция $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$ является многочленом трех переменных, поэтому бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^3$. Значит, множество критических точек совпадает со множеством стационарных. Т. к.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+2\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y+4\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z-6\,,$$

то для нахождения стационарных точек имеем систему

$$\begin{cases} 2x+2=0 \\ 2y+4=0 \\ 2z-6=0 \end{cases},$$

единственным решением которой будет точка $M(-1,-2,3)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 0\,.$$

Значит, матрица A в точке M имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

ее главные миноры $A_1 = 2$, $A_2 = 4$, $A_3 = 8$ положительны. Следовательно, $M(-1,-2,3)$ — точка локального минимума функции f. Соответствующее экстремальное значение $f(M) = f(-1,-2,3) = 1+4+9-2-8-18 = -14$.

14-I. Функция $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^2+3xy-2z-6x-6y$ снова непрерывно дифференцируема любое число раз в $\mathbb{R}^3$. Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+3y-6\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2+3x-6\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z-2\,.$$

Поэтому стационарные точки находятся из системы

$$\begin{cases} x^2+y-2=0 \\ y^2+x-2=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+y-x=0 \\ y^2+x-2=0 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0 \\ y^2+x-2=0 \\ z=1 \end{cases}.$$

Последняя система распадается на две:

$$\text{а)} \begin{cases} x=y \\ x^2+x-2=0 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\,,\ y=1\,,\ z=1 \\ x=-2\,,\ y=-2\,,\ z=1 \end{array} \right. ;$$

$$\text{б)} \begin{cases} x+y-1=0 \\ y^2+x-2=0 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y^2-y-1=0 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2} \\ z=1 \end{cases}.$$

Таким образом, у функции f четыре стационарные точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(-2,-2,1)$, $M_{3,4}\Big(\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2},\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2},1\Big)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0\,.$$

Следовательно, в общем виде матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 6x & 3 & 0 \\ 3 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Исследуем теперь стационарные точки по отдельности.

а) В точке $M_1(1,1,1)$

$$A=\begin{pmatrix}6&3&0\\3&6&0\\0&0&2\end{pmatrix}\,,\ A_1=6>0\,,\ A_2=6^2-3^2>0\,,\ A_3=2(6^2-3^2)>0\,,$$

так что M_1 — точка локального минимума функции f; $f(M_1)=-8$.

б) В точке $M_2(-2,-2,1)$

$$A=\begin{pmatrix}-12&3&0\\3&-12&0\\0&0&2\end{pmatrix}\,,\ A_1=-12<0\,,\ A_2=12^2-3^2>0\,,\ A_3=2(12^2-3^2)>0\,.$$

Это означает, что M_2 не является точкой локального экстремума функции f.

в) В точках $M_{3,4}\Big(\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2},\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2},1\Big)$

$$A=\begin{pmatrix}3(1\mp\sqrt{5})&3&0\\3&3(1\pm\sqrt{5})&0\\0&0&2\end{pmatrix}\,,\ A_1=3(1\mp\sqrt{5})<(>)0\,,$$

$$A_2=9(1\mp\sqrt{5})(1\pm\sqrt{5})-3^2=9(1-5)-9<0\,,\ A_3=2A_2<0\,.$$

Итак, все главные миноры отличны от нуля и меняют знаки не так, как описано в пунктах 1) и 2) Теоремы 5, поскольку $A_2<0$. Значит, точки $M_{3,4}$ не являются точками локального экстремума функции f.

15-I. В области $(0,+\infty)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ функция $f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$ непрерывно дифференцируема любое число раз, так что множество критических точек совпадает со множеством стационарных. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1-\frac{y^2}{4x^2}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}\,,$$

то для нахождения стационарных точек получаем систему:

$$\begin{cases}1-\dfrac{y^2}{4x^2}=0\\[2mm] \dfrac{y}{2x}-\dfrac{z^2}{y^2}=0\\[2mm] \dfrac{2z}{y}-\dfrac{2}{z^2}=0\\[2mm] x>0\,,\ y>0\,,\ z>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{y}{2x}=1\\[2mm] \dfrac{z}{y}=1\\[2mm] 2-\dfrac{2}{z^2}=0\\[2mm] x>0\,,\ y>0\,,\ z>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=1\\ y=1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Итак, у функции f в заданной области имеется единственная стационарная точка $M\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2x^3}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{2x^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{2z}{y^2}\,.$$

Соответственно, в точке M матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}\,.$$

Ее главные миноры

$$A_1 = 4 > 0\,,\ A_2 = 12 - 4 = 8 > 0\,,\ A_3 = 2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 6A_2 = -16 + 48 = 32 > 0\,.$$

Значит, $M\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right)$ — точка локального минимума функции f,

$$f(M) = f\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 2 = 4\,.$$

16-I. Функция $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + xy + 2z^2 - 2xz + 3y - 1$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^3$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y - 2z\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x + 3\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4z - 2x\,.$$

Поэтому стационарные точки находим из системы

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2 + y - 2z = 0 \\ 2y + x + 3 = 0 \\ 2z - x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x^2 - \dfrac{x+3}{2} - x = 0 \\ y = -\dfrac{x+3}{2} \\ z = \dfrac{x}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x^2 - 3x - 3 = 0 \\ y = -\dfrac{x+3}{2} \\ z = \dfrac{x}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\,,\ y = -2\,,\ z = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2}\,,\ y = -\dfrac{5}{4}\,,\ z = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.\,.$$

Значит, у функции f две стационарные точки $M_1\Big(1,-2,\dfrac{1}{2}\Big)$ и $M_2\Big(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{4},-\dfrac{1}{4}\Big)$.

Далее, находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=4\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-2\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0\,.$$

а) В точке $M_1\Big(1,-2,\dfrac{1}{2}\Big)$ матрица A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}\,,\ A_1=6>0\,,\ A_2=11>0\,,\ A_3=-2\cdot 4+4\cdot 11>0\,.$$

Поэтому M_1 — точка локального минимума функции f;

$$f(M_1)=f\Big(1,-2,\frac{1}{2}\Big)=1+4-2+\frac{1}{2}-1-6-1=-\frac{9}{2}\,.$$

б) В точке $M_2\Big(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{4},-\dfrac{1}{4}\Big)$ имеем:

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}\,,\ A_1=-3<0\,,\ A_2=-7<0\,,\ A_3=-2\cdot 4-4\cdot 7<0\,.$$

Соответственно, точка M_2 не является точкой локального экстремума функции f.

17-I. Множество критических точек функции $f(x,y,z)=2x^3yz-x^2-y^2-z^2$ совпадает со множеством стационарных точек. Т. к.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2yz-2x\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2x^3z-2y\,,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2x^3y-2z\,,$$

то стационарные точки находим из системы

$$\begin{cases} 3x^2yz-x=0\\ x^3z-y=0\\ x^3y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2yz-x=0\\ x^3(z-y)+z-y=0\\ x^3y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2yz-x=0\\ (z-y)(x^3+1)=0\\ x^3y-z=0\end{cases}.$$

Последняя система распадается на две:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x=-1\\ 3yz+1=0\\ -y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1\\ z=-y\\ -3y^2+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1\\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ z=\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases};$$

б) $\begin{cases} z = y \\ x^3y - y = 0 \\ 3x^2y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ y(x^3 - 1) = 0 \\ 3x^2y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0\,,\ x = 0\,,\ z = 0 \\ x = 1\,,\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,,\ z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right.$.

Итак, у функции f пять стационарных точек: $M_1(0,0,0)$, $M_{2,3}\Big(-1, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)$, $M_{4,5}\Big(1, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12xyz - 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2 z\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 6x^2 y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2x^3\,.$$

а) В точке $M_1(0,0,0)$ матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\,,\ A_1 = -2 < 0\,,\ A_2 = 4 > 0\,,\ A_3 = -8 < 0\,.$$

Следовательно, M_1 — точка локального максимума функции f; $f(M_1) = 0$.

б) В точках $M_{2,3}\Big(-1, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)$ матрица A получается следующей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \mp 2\sqrt{3} & \pm 2\sqrt{3} \\ \mp 2\sqrt{3} & -2 & -2 \\ \pm 2\sqrt{3} & -2 & -2 \end{pmatrix}\,.$$

Ее главные миноры

$$A_1 = 2 > 0\,,\ A_2 = -4 - 4\cdot 3 = -16 < 0\,,$$

$$A_3 = \pm 2\sqrt{3}(\pm 4\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}) + 2(-4 + 4\cdot 3) - 2A_2 = 16\cdot 3 + 2\cdot 8 + 2\cdot 16 > 0\,.$$

Поэтому точки $M_{2,3}$ не являются точками локального экстремума функции f.

в) В точках $M_{4,5}\Big(1, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)$ имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \pm 2\sqrt{3} & \pm 2\sqrt{3} \\ \pm 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ \pm 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{pmatrix}\,,\ A_1 = 2 > 0\,,\ A_2 = -4 - 4\cdot 3 < 0\,,$$

$$A_3 = \pm 2\sqrt{3}(\pm 4\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}) - 2(4 - 4\cdot 3) - 2A_2 = 16\cdot 3 + 2\cdot 8 - 2\cdot 16 > 0\,.$$

Значит, точки $M_{4,5}$ также не являются точками локального экстремума функции f.

18-I. Функция $f(x,y,z) = z\ln z - z - z\ln xy + xy + x^2 - 4x + y^3 - 9y^2 + 15y$ определена и бесконечно дифференцируема на множестве $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy > 0\,,\; z > 0\}$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{z}{x} + y + 2x - 4\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{z}{y} + x + 3y^2 - 18y + 15\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \ln z - \ln xy\,.$$

Для нахождения стационарных точек решаем систему

$$\begin{cases} -\dfrac{z}{x} + y + 2x - 4 = 0 \\ -\dfrac{z}{y} + x + 3y^2 - 18y + 15 = 0 \\ \ln z = \ln xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = xy\,,\; z > 0 \\ -y + y + 2x - 4 = 0 \\ -x + x + 3y^2 - 18y + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\,,\; y = 1\,,\; z = 2 \\ x = 2\,,\; y = 5\,,\; z = 10 \end{array} \right. .$$

Таким образом, у функции f две стационарные точки $M_1(2,1,2)$ и $M_2(2,5,10)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{z^2}{x^2} + 2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{z^2}{y^2} + 6y - 18\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{z}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{x}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{y}\,.$$

а) В точке $M_1(2,1,2)$ получаем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & -8 & -1 \\ -\dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \; A_1 = 3 > 0\,,\; A_2 = -25 < 0\,,$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\cdot(-5) - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cdot(-25) = -\frac{25}{2} < 0\,.$$

В соответствии с Теоремой 5, точка M_1 не является точкой локального экстремума функции f.

б) В точке $M_2(2,5,10)$

$$A = \begin{pmatrix} 27 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & 16 & -\dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{10} \end{pmatrix}, \; A_1 = 27 > 0\,,\; A_2 = 27\cdot 16 - 1 > 0\,,$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{39}{5} + \frac{1}{5}\cdot\Big(-\frac{27}{5}+\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{10}\cdot(27\cdot 16 - 1) > 0\,.$$

Значит, $M_2(2,5,10)$ — точка локального минимума функции f; $f(M_2) = 4 - 8 + 5^3 - 9\cdot 5^2 + 15\cdot 5 = -33$.

19-I. Данная функция $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^3$ и

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z\,,\quad \frac{\partial f}{\partial z} = y + x\,.$$

Система

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $M(0,0,0)$. Это единственная стационарная точка функции f.

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 1\,.$$

Значит, имеем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Т. к. уже первый главный минор $A_1 = 0$, то Теорема 5 не дает ответа на вопрос о наличии экстремума в точке M.

Приращение функции f в точке M имеет вид:

$$\Delta f_{(0,0,0)}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = f(\Delta x, \Delta y, \Delta z) - f(0,0,0) =$$

$$= \Delta x\cdot\Delta y + \Delta y\cdot\Delta z + \Delta z\cdot\Delta x\,.$$

Нетрудно увидеть, что это приращение может принимать значения разных знаков:

$$\Delta f_{(0,0,0)}(\Delta x, \Delta x, 0) = \Delta x^2 > 0\,,\ \Delta x \neq 0\,;$$

$$\Delta f_{(0,0,0)}(\Delta x, -\Delta x, 0) = -\Delta x^2 < 0\,,\ \Delta x \neq 0\,.$$

Следовательно, найденная стационарная точка M не является точкой локального экстремума функции f.

20-I*. Функция $f(x,y,z) = yx^3z^2(2 - y - 2z - 3x)$ непрерывно дифференцируема любое число раз в $\mathbb{R}^3$, так что множество ее критических точек совпадает со множеством стационарных. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3yx^2z^2(2-y-2z-3x) - 3yx^3z^2\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3z^2(2-y-2z-3x) - yx^3z^2\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2yx^3z(2-y-2z-3x) - 2yx^3z^2\,,$$

то для нахождения стационарных точек получаем систему:

$$\begin{cases} yx^2z^2(2-y-2z-4x) = 0 \\ x^3z^2(2-2y-2z-3x) = 0 \\ yx^3z(2-y-3z-3x) = 0 \end{cases}.$$

Прежде всего, очевидно, что решениями данной системы будут все точки $P(0, y, z)$ и $Q(x, y, 0)$, где числа x, y, z могут быть произвольными. Далее, решениями будут также точки, для которых $y = 0$, $2 - 2y - 2z - 3x = 0$, т. е. все точки прямой $2z + 3x = 2$ в плоскости $y = 0$. В общем виде их можно записать как точки $R\Big(x, 0, \dfrac{2-3x}{2}\Big)$.

Наконец, стационарными точками функции f будут все решения системы

$$\begin{cases} 2-y-2z-4x = 0 \\ 2-2y-2z-3x = 0 \\ 2-y-3z-3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x = 0 \\ -y+z = 0 \\ 2-y-3z-3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \\ 2-y-3y-3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{7}\,.$$

Таким образом, у функции f имеется еще одна стационарная точка $M\Big(\dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{7}\Big)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6yxz^2(2-y-2z-3x) - 18yx^2z^2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^3z^2\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2yx^3(2-y-2z-3x) - 8yx^3z\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2z^2(2-y-2z-3x) - 3yx^2z^2 - 3x^3z^2\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 6yx^2z(2-y-2z-3x) - 6yx^2z^2 - 6yx^3z\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2x^3z(2-y-2z-3x) - 2x^3z^2 - 2yx^3z\,.$$

а) В точке $M\Big(\dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{7}\Big)$ выражение $2 - y - 2z - 3x$ равно $2 - 6 \cdot \dfrac{2}{7} = \dfrac{2}{7}$, так что

$$a_{11} = -12 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5, \; a_{22} = -2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5, \; a_{33} = -6 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5,$$

$$a_{12} = -3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5, \; a_{13} = -6 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5, \; a_{23} = -2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5.$$

Значит,

$$A = \begin{pmatrix} -12 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5 & -3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5 & -6 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5 \\ -3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5 & -2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5 & -2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5 \\ -6 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5 & -2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5 & -6 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5 \end{pmatrix};$$

$$A_1 = -12 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5 < 0\,, \quad A_2 = \left(\frac{2}{7}\right)^{10} \cdot \begin{vmatrix} -12 & -3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 15 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{10} > 0\,,$$

$$A_3 = -\left(\frac{2}{7}\right)^{15} \begin{vmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -6 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{15} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{15} (-2 \cdot 3 - 2 + 3 \cdot 5) = -42 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{15} < 0\,.$$

Таким образом, M — точка локального максимума функции f; $f(M) = \left(\frac{2}{7}\right)^7$.

б) Проведем исследование в стационарных точках $P(0, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$. Ясно, что в этих точках уже первый главный минор матрицы A обращается в 0, так что данные точки придется изучать через приращение функции. Зафиксируем $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

$$\Delta f_{(0,y_0,z_0)}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = f(\Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(0, y_0, z_0) =$$
$$= (y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x^3 \cdot (z_0 + \Delta z)^2 \big[(2 - y_0 - 2z_0) - \Delta y - 2\Delta z - 3\Delta x\big]\,.$$

б-1) Если $2 - y_0 - 2z_0 \neq 0$, то при малых $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ выражение в квадратных скобках будет сохранять знак числа $2 - y_0 - 2z_0$. Выражение $y_0 + \Delta y$ либо сохраняет знак числа y_0, если $y_0 \neq 0$, либо имеет знак Δy, если $y_0 = 0$. В целом, понятно, что знак всего приращения будет меняться при изменении знака Δx.

б-2) Рассмотрим случай $2 - y_0 - 2z_0 = 0$. При этом

$$\Delta f_{(0,y_0,z_0)}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = -(y_0 + \Delta y) \cdot (z_0 + \Delta z)^2 \cdot \Delta x^3 \cdot (\Delta y + 2\Delta z + 3\Delta x)\,.$$

Нетрудно увидеть, что это выражение также может принимать значения разных знаков:

$$\Delta f_{(0,y_0,z_0)}(\Delta z^2, \Delta z^2, \Delta z) = -(y_0 + \Delta z^2) \cdot (z_0 + \Delta z)^2 \cdot \Delta z^6 \cdot (\Delta z^2 + 2\Delta z + 3\Delta z^2) =$$
$$= -(y_0 + \Delta z^2) \cdot (z_0 + \Delta z)^2 \cdot (2 + 4\Delta z) \cdot \Delta z^7\,.$$

При $y_0 \neq 0$ и малых Δz знак приращения совпадает со знаком выражения $-y_0\Delta z^7$, а при $y_0 = 0$ — со знаком выражения $-\Delta z^9$. В любом случае знак меняется при изменении знака Δz.

Таким образом, ни одна из точек $P(0, y, z)$ координатной плоскости $x = 0$ не является точкой локального экстремума функции f.

в) Рассмотрим теперь точки $Q(x, y, 0)$. Случай $x = 0$ входит в пункт б), поэтому его рассматривать не нужно. Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $y_0 \in \mathbb{R}$.

$$\Delta f_{(x_0,y_0,0)}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \Delta z) - f(x_0, y_0, 0) =$$

$$= (y_0 + \Delta y) \cdot (x_0 + \Delta x)^3 \cdot \Delta z^2 \cdot \left[(2 - y_0 - 3x_0) - \Delta y - 2\Delta z - 3\Delta x\right].$$

в-1) Пусть $2 - y_0 - 3x_0 \neq 0$. Тогда выражение в квадратных скобках при малых Δx, Δy и Δz сохраняет знак числа $2 - y_0 - 3x_0$. Точно так же скобка $(x_0 + \Delta x)^3$ сохраняет знак числа x_0^3. Если при этом $y_0 \neq 0$, то и выражение $y_0+\Delta y$ при малых Δy будет иметь определенный знак. В целом, в этом случае знак всего приращения совпадает со знаком $y_0 \cdot x_0(2-y_0-3x_0)$. Таким образом, все точки плоскости $z = 0$, не лежащие на прямой $y + 3x = 2$ и на осях $x = 0$, $y = 0$, будут точками локального экстремума функции f. Характер экстремума может быть разный в зависимости от расположения точки на плоскости. Изобразите плоскость Oxy, прямую $y + 3x = 2$ и в каждой из семи областей, образованных этой прямой и осями координат, определите знак приращения функции f и, соответственно, характер экстремума.

Если же $y_0 = 0$, то, очевидно, приращение функции в рассматриваемой точке будет менять знак при изменении знака Δy, т. е. эти точки не являются точками локального экстремума функции f.

в-2) Пусть теперь $2 - y_0 - 3x_0 = 0$. Если $y_0 \neq 0$, то

$$\Delta f_{(x_0,y_0,0)}(0, 0, \Delta z) = -2y_0 \cdot x_0^3 \cdot \Delta z^3$$

будет менять знак при изменении знака Δz.

Если же $y_0 = 0$, то $x_0 = \dfrac{2}{3}$ и приращение

$$\Delta f_{(\frac{2}{3},0,0)}(0, \Delta z^2, \Delta z) = \Delta z^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \Delta z^2 \cdot (-\Delta z^2 - 2\Delta z) = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \Delta z^5 \cdot (2 + \Delta z)$$

будет менять знак при изменении знака Δz.

Значит, ни одна из точек прямой $y + 3x = 2$ в плоскости $z = 0$ не является точкой локального экстремума функции f.

г) Наконец, изучим точки R, лежащие на прямой $2z + 3x = 2$ в плоскости $y = 0$. Случай $x = 0$ входит в пункт б), а случай $z = 0$ — в пункт в), поэтому их не рассматриваем. Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пусть $z_0 = \dfrac{2 - 3x_0}{2} \neq 0$. Имеем, что

$$\Delta f_{(x_0,0,z_0)}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = -\Delta y \cdot (x_0 + \Delta x)^3 \cdot (z_0 + \Delta z)^2 \cdot (\Delta y + 2\Delta z + 3\Delta x)\,.$$

В частности,

$$\Delta f_{(x_0,0,z_0)}(\Delta y, \Delta y, 0) = -4\Delta y^2 \cdot (x_0 + \Delta y)^3 \cdot z_0^2\,,$$

$$\Delta f_{(x_0,0,z_0)}(-\Delta y, \Delta y, 0) = 2\Delta y^2 \cdot (x_0 - \Delta y)^3 \cdot z_0^2\,.$$

Т. к. $x_0 \neq 0$ и $z_0 \neq 0$, то выражения $(x_0 \pm \Delta y)^3 \cdot z_0^2$ при малых Δy будут сохранять знак числа x_0. Значит, в первом и во втором из приведенных случаев знак приращения функции будет разный. Соответственно, рассматриваемые точки не являются точками локального экстремума функции f.

2 Условный экстремум

2.1 Необходимые теоретические сведения

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^{n+m}_{x;y}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, и пусть на множестве G определены функция $f : G \to \mathbb{R}$ и отображение $F = (F_1, \ldots, F_m) : G \to \mathbb{R}^m$. Соотношение $F(x; y) = 0$ будем называть *соотношением связи.* Оно равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} F_1(x; y) = 0 \\ \ldots \\ F_m(x; y) = 0 \end{cases},$$

которые также называются *уравнениями связи.* Положим $\Gamma_F := \{(x; y) \in G : F(x; y) = 0\}$. Таким образом, Γ_F — совокупность всех точек множества G, удовлетворяющих соотношению связи.

Определение 2. *Точка $M_0(x_0; y_0) \in \Gamma_F$ называется точкой локального условного максимума функции f при соотношении связи $F(x; y) = 0$, если найдется такая окрестность $U_{M_0} \subset G$ этой точки, что*

$$f(x; y) \leqslant f(x_0; y_0) \text{ для всех } (x; y) \in U_{M_0} \cap \Gamma_F\,. \tag{8}$$

Если же

$$f(x; y) \geqslant f(x_0; y_0) \text{ для всех } (x; y) \in U_{M_0} \cap \Gamma_F\,, \tag{9}$$

то точка $M_0(x_0; y_0)$ называется точкой локального условного минимума функции f при соотношении связи $F(x; y) = 0$. При этом значение $f(M_0)$ называется условным экстремумом.

В случае, если $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ или, соответственно, $f(x; y) > f(x_0; y_0)$ при всех $(x; y) \in \overset{\circ}{U}_{M_0} \cap \Gamma_F$, говорят о *строгом* локальном условном максимуме или минимуме.

Таким образом, если в задаче локального экстремума значение функции f в точке M_0 сравнивается с ее значениями во всей окрестности U_{M_0}, то в задаче условного экстремума сравнение проводится лишь со значениями функции в тех точках, которые удовлетворяют соотношению связи. Поэтому точки локального экстремума еще называют точками локального *безусловного* экстремума.

Очевидно, что если функция f имеет в точке M_0 безусловный экстремум, то она будет иметь в этой точке и условный экстремум того же характера при любом соотношении связи.

Задача условного экстремума естественным образом связана с задачей безусловного экстремума. Именно, пусть отображение $F(x;y)$ непрерывно дифференцируемо в G, $M_0(x_0;y_0) \in \Gamma_F$ и якобиан отображения F по переменным $y_1, \dots y_m$ в точке M_0 отличен от 0:

$$\frac{D(F_1, \dots F_m)}{D(y_1, \dots y_m)}(M_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0) & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(M_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(M_0) & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(M_0) \end{vmatrix} \neq 0 \,. \qquad (10)$$

Тогда, как известно, найдутся окрестности U_{x_0} и U_{y_0} такие, что на $U_{x_0} \times U_{y_0}$ соотношение $F(x;y) = 0$ определяет непрерывно дифференцируемое неявное отображение $y = \varphi(x) : U_{x_0} \to U_{y_0}$. Другими словами, $y_1, \dots, y_m$ локально представляют собой некоторые неявные функции от $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{gathered} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n)\,; \\ \dots \\ y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)\,. \end{gathered}$$

Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае функция $f(x;y)$ будет иметь локальный условный максимум или минимум в точке $M_0(x_0;y_0)$ при соотношении связи $F(x;y) = 0$ тогда и только тогда, когда функция $f(x;\varphi(x))$ будет иметь безусловный максимум или, соответственно, минимум в точке x_0.

Заметим, что мы лишь для удобства предполагаем, что именно m последних переменных $y_1, \dots, y_m$ функции f выражаются через n первых переменных $x_1, \dots, x_n$. На самом деле это, конечно, могут быть любые m ее переменных.

На приведенной взаимосвязи между задачами условного и безусловного экстремума основан первый метод решения задачи условного экстремума — **метод исключения**. Состоит он в том, что сначала из соотношений связи m каких-нибудь переменных явно выражаются через остальные — например, $y = \varphi(x)$, т. е. $y_1 = \varphi_1(x_1, \dots x_n)$,..., $y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$, — затем эти выражения подставляются в f, после чего полученная функция $f(x;\varphi(x))$ исследуется на безусловный экстремум.

Приведем простой пример, иллюстрирующий метод исключения.

Пример 1. *Исследовать функцию $f(x, y) = xy$ на локальный экстремум при условии $x + y = 0$.*

Решение. Функция f определена и непрерывна в $\mathbb{R}^2$. Соотношение связи $x + y = 0$ легко разрешается относительно любой из переменных. Выразим, например, y через x: $y = -x$. Подставляя в f, получаем новую функцию

$$g(x) := f(x, -x) = -x^2\,,$$

которую необходимо исследовать на безусловный экстремум. Очевидно, что g имеет единственный локальный экстремум — максимум в точке $x_0 = 0$. Следовательно, точка $M_0(x_0, -x_0)$, т. е. $M_0(0,0)$ является точкой локального условного максимума функции f при заданном соотношении связи. Соответствующее экстремальное значение $f(M_0) = f(0,0) = 0$.

При этом нетрудно заметить, что безусловного максимума в точке M_0 у функции f нет, поскольку, например, $f(x,x) = x^2 > 0 = f(0,0)$ при $x \neq 0$. $\square$

Естественно, метод исключения имеет значительные ограничения в применении, поскольку далеко не всегда соотношения связи можно явно и корректно разрешить относительно каких-либо переменных.

Более универсальным методом решения задачи условного экстремума является **метод Лагранжа**. Основан он на двух следующих теоремах.

Теорема 6. *Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^{n+m}_{x;y}$, функция $f : G \to \mathbb{R}$ и отображение $F = (F_1, \ldots, F_m) : G \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемы в G. Предположим, что $M_0(x_0; y_0)$ — точка локального условного экстремума функции f при соотношении связи $F(x;y) = 0$ и ранг матрицы Якоби*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(M_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(M_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}(M_0) & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(M_0) & \ldots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(M_0) \end{pmatrix}$$

отображения F в точке M_0 равен m. Тогда найдется такой набор чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, что точка M_0 является стационарной точкой функции $f_\lambda(x;y) = f(x;y) + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k F_k(x;y)$, т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}(M_0) = 0\,,\ j = 1, \ldots, n\,, \\ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial y_i}(M_0) = 0\,,\ i = 1, \ldots, m\,. \end{cases}$$

Определение 3. *Функция* $f_\lambda = f + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k F_k$ *называется функцией Лагранжа; параметры* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *— множителями Лагранжа.*

Таким образом, точки возможных условных экстремумов функции f при соотношении связи $F(x; y) = 0$ следует искать как решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} = 0\,,\ j = 1, \ldots, n\,, \\ \dfrac{\partial f_\lambda}{\partial y_i} = 0\,,\ i = 1, \ldots, m\,, \\ \\ F_k = 0\,,\ k = 1, \ldots, m\,, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial x_j} = 0\,,\ j = 1, \ldots, n\,, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_i} + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \dfrac{\partial F_k}{\partial y_i} = 0\,,\ i = 1, \ldots, m\,, \\ \\ F_k = 0\,,\ k = 1, \ldots, m\,. \end{cases} \quad (11)$$

Данная система состоит из $n+2m$ уравнений и содержит $n+2m$ неизвестных: $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_m$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Пусть $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $y_0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0)$, $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ — какое-либо решение этой системы, т. е. $M_0(x_0; y_0)$ — стационарная точка функции Лагранжа, а λ_0 — соответствующий ей набор множителей Лагранжа. Для исследования вопроса о наличии в точке M_0 условного экстремума при соотношении связи $F(x; y) = 0$ применяется

Теорема 7. *Пусть функция f и отображение F дважды непрерывно дифференцируемы на G; $M_0(x_0; y_0)$ — стационарная точка функции Лагранжа, $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ — соответствующий ей набор множителей Лагранжа. Пусть в точке M_0 выполняется условие (10), а $y = \varphi(x) : U_{x_0} \to U_{y_0}$ — дважды непрерывно дифференцируемое неявное отображение, определяемое соотношением $F(x; y) = 0$.*

1) Если $(d^2 f_{\lambda_0})_{M_0}\big(dx; d\varphi_{x_0}(dx)\big) > 0$ при всех $dx \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то M_0 — точка локального условного минимума функции f при уравнении связи $F(x; y) = 0$.

2) Если $(d^2 f_{\lambda_0})_{M_0}\big(dx; d\varphi_{x_0}(dx)\big) < 0$ при всех $dx \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то M_0 — точка локального условного максимума функции f при уравнении связи $F(x; y) = 0$.

3) Если $(d^2 f_{\lambda_0})_{M_0}\big(dx; d\varphi_{x_0}(dx)\big)$ принимает в $\mathbb{R}^n$ значения разных знаков, то f не имеет экстремума в точке M_0 при уравнении связи $F(x; y) = 0$.

Таким образом, решая задачу условного экстремума функции f при соотношении связи $F(x; y) = 0$ методом Лагранжа, необходимо сделать следующее:

1. Составить функцию Лагранжа $f_\lambda = f + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k F_k$.

2. Найти стационарные точки $M_0(x_0; y_0)$ функции Лагранжа и соответствующие им множители Лагранжа $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$, решив систему (11).

3. Найти второй дифференциал $d^2 f_\lambda$ функции Лагранжа.

4. Продифференцировать соотношения связи. В полученные равенства $dF_k(x; y) = 0$, $k = 1, \ldots, m$, подставить точку $M_0(x_0; y_0)$ и выразить dy_i, $i = 1, \ldots, m$, через dx_j, $j = 1, \ldots, n$.

5. Во второй дифференциал $d^2 f_\lambda$ подставить λ_0, M_0 и найденные выражения для dy_i. Если полученное выражение положительно (соответственно, отрицательно) при всех $dx \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то M_0 — точка локального условного минимума (максимума) функции f при соотношении связи $F(x; y) = 0$. Если же это выражение может принимать значения разных знаков, то условного экстремума в точке M_0 нет.

Разберем стандартный пример, демонстрирующий применение метода Лагранжа.

Пример 2. *Найти условные экстремумы функции $f(x, y) = xy$ при соотношении связи $x^2 + y^2 = 2$.*

Решение. В данном случае применение метода исключения затруднительно, поскольку соотношение связи не может быть однозначно разрешено относительно x или y.

Реализуем метод Лагранжа.

Условие связи переписываем в виде $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2 = 0$ и составляем функцию Лагранжа:

$$f_\lambda(x, y) = f(x, y) + \lambda F(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)\,.$$

Т. к.

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = y + 2\lambda x\,, \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} = x + 2\lambda y\,,$$

то стационарные точки функции Лагранжа находятся из системы

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}.$$

При решении подобных систем бывает удобно поступить следующим образом. Первые два уравнения системы представляют собой однородную систему относительно x и y. При этом нулевое решение $x = 0$, $y = 0$ не удовлетворяет третьему уравнению системы. Следовательно, если исходная система разрешима, то однородная система будет иметь ненулевые решения. Значит, ее определитель должен быть равен 0:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}\,.$$

Таким образом, рассматриваемая система распадается на две:

$$\text{а)} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ y + x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ y = -x \\ 2x^2 = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ x = \pm 1 \\ y = \mp 1 \end{array} \right. ;$$

$$\text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ y - x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ y = x \\ 2x^2 = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{array} \right. .$$

Итак, имеем четыре стационарные точки: $M_{1,2}(\pm1, \mp1)$ при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ и $M_{3,4}(\pm1, \pm1)$ при $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

Находим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$df_\lambda = xdy + ydx + \lambda(2xdx + 2ydy)\,;$$

$$d^2 f_\lambda = 2dxdy + 2\lambda(dx^2 + dy^2)\,.$$

Дифференцируя соотношение связи, получаем:

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow 2xdx + 2ydy = 0 \Rightarrow xdx + ydy = 0\,.$$

Начинаем исследование стационарных точек.

а) $M_{1,2}(\pm1, \mp1)$, $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Подставляем точки $M_{1,2}$ в продифференцированное уравнение связи и получаем соотношение для dx и dy:

$$\pm dx \mp dy = 0 \Leftrightarrow dx - dy = 0 \Leftrightarrow dy = dx\,.$$

Теперь во второй дифференциал функции Лагранжа необходимо подставить координаты точек $M_{1,2}$ (в данном случае в этом нет необходимости, т. к. $d^2 f_\lambda$ не зависит от x и y), значение λ и $dy = dx$:

$$\left(d^2 f_{\frac{1}{2}}\right)_{M_{1,2}}(dx, dx) = 2dx^2 + 2dx^2 = 4dx^2 > 0\,,\ dx \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

На основании Теоремы 7 заключаем, что $M_{1,2}$ — точки локального условного минимума функции f при соотношении связи $x^2+y^2 = 2$. При этом $f(M_{1,2}) = f(\pm1, \mp1) = -1$.

б) $M_{3,4}(\pm 1, \pm 1)$, $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. Снова подставляем данные точки в продифференцированное соотношение связи и получаем:

$$\pm dx \pm dy = 0 \Leftrightarrow dx + dy = 0 \Leftrightarrow dy = -dx\,.$$

Следовательно,

$$\left(d^2 f_{-\frac{1}{2}}\right)_{M_{3,4}}(dx, -dx) = -2dx^2 - 2dx^2 = -4dx^2 < 0\,,\ dx \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Значит, $M_{3,4}$ — точки локального условного максимума функции f при соотношении связи $x^2 + y^2 = 2$; $f(M_{3,4}) = f(\pm 1, \pm 1) = 1$. $\square$

2.2 Задачи

Часть I

Исследовать на условный экстремум функцию $f(x,y)$ двух переменных при заданном соотношении связи:

21-I. $f(x,y) = x^2 + y^2,\ \ 3x + 2y - 6 = 0.$

22-I. $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y,\ \ x - y - \dfrac{\pi}{4} = 0.$

23-I. $f(x,y) = 1 - 4x - 8y,\ \ x^2 - 8y^2 = 8.$

24-I. $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2,\ \ 4x^2 + y^2 = 25.$

25-I. $f(x,y) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ \ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{8}.$

Исследовать на условный экстремум функцию $f(x,y,z)$ трех переменных при заданных соотношениях связи:

26-I. $f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + z^2,\ \ x + y - z = 0.$

27-I. $f(x,y,z) = x^3y^2z,\ \ x + y + z = 12\ \ (x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$

28-I. $f(x,y,z) = 3x + 12y - 4z,\ \ x^2 - y^2 + z^2 + 119 = 0.$

29-I. $f(x,y,z) = xyz,\ \ xy + yz + xz = 3.$

30-I. $f(x,y,z) = xyz - 3yz,\ \ x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 18\ \ (x > 0,\ y > 0).$

31-I. $f(x,y,z) = xyz,\ \ x + y + z = 0,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

Часть II

Исследовать на условный экстремум функцию f при заданном соотношении связи:

21-II. $f(x,y) = x^2 - y^2,\ \ 2x - y - 3 = 0.$

22-II. $f(x,y) = xy^2,\ \ x + 2y - 1 = 0.$

23-II. $f(x,y) = 5 - 3x - 4y,\ \ x^2 + y^2 = 25.$

24-II. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2,\ \ x^2 + y^2 = 1.$

25-II. $f(x,y) = \ln xy,\ \ x^3 + xy + y^3 = 0.$

Исследовать на условный экстремум функцию $f(x,y,z)$ трех переменных при заданных соотношениях связи:

26-II. $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2,\ \ x + y + z = 13.$

27-II. $f(x,y,z) = x^2y^3z^4,\ \ 2x + 3y + 4z = 18\ \ (x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$

28-II. $f(x,y,z) = 2x + y - z + 1,\ \ x^2 + y^2 + 2z^2 = 22.$

29-II. $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz,\ \ xyz = 108.$

30-II. $f(x,y,z) = xyz - xy,\ \ x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0\ \ (x > 0,\ y > 0).$

31-II. $f(x,y,z) = xy + yz,\ \ x^2 + y^2 = 2,\ \ y + z = 2\ \ (x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$

2.3 Решение задач Части I

21-I. В данном случае соотношение связи $3x+2y-6=0$ легко разрешается относительно любой из переменных:

$$3x+2y-6=0 \Leftrightarrow y=\frac{6-3x}{2}=\frac{3}{2}(2-x)\,.$$

Подставляя это выражение в исходную функцию $f(x,y)=x^2+y^2$, получаем:

$$g(x):=f\Big(x,\frac{3}{2}(2-x)\Big)=x^2+\frac{9}{4}(x-2)^2\,,\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Функцию $g(x)$ теперь исследуем на безусловный экстремум. Она бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и

$$g'(x)=2x+\frac{9}{2}(x-2)=\frac{1}{2}(13x-18)\,.$$

Таким образом, g имеет единственную стационарную точку $x=\dfrac{18}{13}$. Поскольку $g'(x)<0$ при $x\in\Big(0,\dfrac{18}{13}\Big)$ и $g'(x)>0$ при $x\in\Big(\dfrac{18}{13},+\infty\Big)$, то $x=\dfrac{18}{13}$ — точка минимума функции g.

Значит, точка $M\Big(\dfrac{18}{13},\dfrac{3}{2}\Big(2-\dfrac{18}{13}\Big)\Big)$, т. е. $M\Big(\dfrac{18}{13},\dfrac{12}{13}\Big)$ — точка локального условного минимума функции f при заданном соотношении связи;

$$f(M)=f\Big(\frac{18}{13},\frac{12}{13}\Big)=\frac{18^2+12^2}{13^2}=\frac{468}{169}=\frac{36}{13}\,.$$

22-I. Аналогично Задаче 21-I, разрешаем соотношение связи относительно y:

$$x-y=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow y=x-\frac{\pi}{4}\,.$$

Исследуем функцию

$$g(x):=f\Big(x,x-\frac{\pi}{4}\Big)=\cos^2 x+\cos^2\Big(x-\frac{\pi}{4}\Big)\,,\ x\in\mathbb{R}\,,$$

на безусловный экстремум. Т. к.

$$\begin{aligned}g'(x)&=-2\cos x\sin x-2\cos\Big(x-\frac{\pi}{4}\Big)\sin\Big(x-\frac{\pi}{4}\Big)=\\&=-\sin 2x-\sin\Big(2x-\frac{\pi}{2}\Big)=\cos 2x-\sin 2x\,,\end{aligned}$$

то стационарные точки находятся как решения уравнения

$$\cos 2x-\sin 2x=0\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+\pi k\,,\ k\in\mathbb{Z}\,,\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\,,\ k \in \mathbb{Z}\,, \\ 2x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k\,,\ k \in \mathbb{Z}\,, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \pi k\,,\ k \in \mathbb{Z}\,, \\ x = \dfrac{5\pi}{8} + \pi k\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \end{array}\right.$$

По единичной окружности понятно, что при переходе через каждую стационарную точку из первой группы производная g' меняет знак с «+» на «-», а через каждую точку из второй группы — с «-» на «+». Таким образом, все точки $x = \dfrac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, являются точками локального максимума функции g. А значит, точки $M_k\Big(\dfrac{\pi}{8} + \pi k, -\dfrac{\pi}{8} + \pi k\Big)$, $k \in \mathbb{Z}$, будут точками локального условного максимума функции f при соотношении связи $x - y - \dfrac{\pi}{4} = 0$. Точки $x = \dfrac{5\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, наоборот, будут точками локального минимума функции g, так что точки $N_k\Big(\dfrac{5\pi}{8} + \pi k, \dfrac{3\pi}{8} + \pi k\Big)$, $k \in \mathbb{Z}$, являются точками локального условного минимума функции f. При этом

$$f(M_k) = f\Big(\frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\Big) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \cos\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,;$$

$$f(N_k) = f\Big(\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\Big) = \cos^2\Big(\pi - \frac{3\pi}{8}\Big) + \cos^2\frac{3\pi}{8} = 2\cos^2\frac{3\pi}{8} = 1 + \cos\frac{3\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

23-I. Соотношение связи $x^2 - 8y^2 = 8$ определяет гиперболу (нарисуйте ее). Отдельно на правой и левой ветках этой гиперболы x можно однозначно выразить через y как $x = \sqrt{8 + 8y^2}$ и $x = -\sqrt{8 + 8y^2}$, соответственно. После этого задача сведется к исследованию на безусловный экстремум функций $f\big(\pm\sqrt{8 + 8y^2}, y\big)$, $y \in \mathbb{R}$.

Однако, поскольку метод исключения приводит к появлению иррациональностей, на наш взгляд, удобнее воспользоваться методом Лагранжа.

Переписываем соотношение связи в виде $x^2 - 8y^2 - 8 = 0$ и составляем функцию Лагранжа:

$$f_\lambda(x, y) = f(x, y) + \lambda F(x, y) = 1 - 4x - 8y + \lambda(x^2 - 8y^2 - 8)\,.$$

Находим ее частные производные:

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = -4 + 2\lambda x\,, \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} = -8 - 16\lambda y\,.$$

Поэтому для нахождения стационарных точек и соответствующих множителей Лагранжа имеем систему:

$$\begin{cases} -4+2\lambda x=0 \\ -8-16\lambda y=0 \\ x^2-8y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{\lambda} \\ y=-\dfrac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{4}{\lambda^2}-\dfrac{2}{\lambda^2}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2=\dfrac{1}{4} \\ x=\dfrac{2}{\lambda} \\ y=-\dfrac{1}{2\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\pm\dfrac{1}{2} \\ x=\pm 4 \\ y=\mp 1 \end{cases}.$$

Значит, у нас две стационарные точки: $M_1(4,-1)$ при $\lambda=\dfrac{1}{2}$ и $M_2(-4,1)$ при $\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

Находим первый и второй дифференциалы функции Лагранжа:

$$df_\lambda=-4dx-8dy+\lambda(2xdx-16ydy)\,;\;\; d^2f_\lambda=2\lambda(dx^2-8dy^2)\,.$$

Дифференцируем соотношение связи:

$$x^2-8y^2=8 \Rightarrow 2xdx-16ydy=0 \Leftrightarrow xdx-8ydy=0\,.$$

а) $M_1(4,-1)$, $\lambda=\dfrac{1}{2}$. Подставляем координаты точки M_1 в продифференцированное соотношение связи:

$$4dx+8dy=0 \Leftrightarrow dx=-2dy\,.$$

Тогда

$$\left(d^2f_{\frac{1}{2}}\right)_{M_1}(-2dy,dy)=4dy^2-8dy^2=-4dy^2<0\,,\; dy\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Следовательно, M_1 — точка локального условного максимума функции f при соотношении связи $x^2-8y^2=8$; $f(M_1)=f(4,-1)=1-16+8=-7$.

б) Для точки $M_2(-4,1)$ при $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ имеем, что

$$-4dx-8dy=0 \Leftrightarrow dx=-2dy\,.$$

Значит,

$$\left(d^2f_{-\frac{1}{2}}\right)_{M_2}(-2dy,dy)=-(4dy^2-8dy^2)=4dy^2>0\,,\; dy\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Поэтому M_2 — точка локального условного минимума функции f; $f(M_2)=f(-4,1)=1+16-8=9$.

24-I. Как и в предыдущей задаче, будем использовать метод Лагранжа. Записываем соотношение связи в виде $F(x,y)\equiv 4x^2+y^2-25=0$ и составляем функцию Лагранжа:

$$f_\lambda(x,y)=f(x,y)+\lambda F(x,y)=x^2+12xy+2y^2+\lambda(4x^2+y^2-25)\,.$$

Поскольку

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = 2x + 12y + 8\lambda x\,, \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} = 12x + 4y + 2\lambda y\,,$$

то для нахождения ее стационарных точек имеем систему:

$$\begin{cases} (1+4\lambda)x + 6y = 0 \\ 6x + (2+\lambda)y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 25 \end{cases}.$$

Как в демонстрационном Примере 2, пара $x = 0$, $y = 0$ не удовлетворяет третьему уравнению системы. Поэтому для того чтобы рассматриваемая система была разрешима, необходимо, чтобы однородная относительно x и y система из двух первых уравнений имела ненулевые решения. Значит, ее определитель должен быть равен 0:

$$\begin{vmatrix} 1+4\lambda & 6 \\ 6 & 2+\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; (1+4\lambda)(2+\lambda) - 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 + 9\lambda - 34 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 2\,,\; \lambda = -\frac{34}{8} = -\frac{17}{4}\,.$$

Таким образом, система распадается на две:

$$\text{а)}\; \begin{cases} \lambda = 2 \\ 6x + 4y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ y = -\dfrac{3}{2}x \\ 4x^2 + \dfrac{9}{4}x^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \dfrac{25x^2}{4} = 25 \\ y = -\dfrac{3}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = \pm 2 \\ y = \mp 3 \end{cases};$$

$$\text{б)}\; \begin{cases} \lambda = -\dfrac{17}{4} \\ -16x + 6y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{17}{4} \\ y = \dfrac{8}{3}x \\ 4x^2 + \dfrac{64}{9}x^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{17}{4} \\ \dfrac{100x^2}{9} = 25 \\ y = \dfrac{8}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{17}{4} \\ x = \pm\dfrac{3}{2} \\ y = \pm 4 \end{cases}.$$

Итак, имеем четыре стационарные точки: $M_{1,2}(\pm 2, \mp 3)$ при $\lambda = 2$ и $M_{3,4}\Big(\pm\dfrac{3}{2}, \pm 4\Big)$ при $\lambda = -\dfrac{17}{4}$.

Находим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$df_\lambda = 2xdx + 12(xdy + ydx) + 4ydy + \lambda(8xdx + 2ydy)\,;$$

$$d^2 f_\lambda = 2dx^2 + 24dxdy + 4dy^2 + 2\lambda(4dx^2 + dy^2)\,.$$

Дифференцируем соотношение связи:

$$4x^2+y^2=25 \Rightarrow 8xdx+2ydy=0 \Leftrightarrow 4xdx+ydy=0\,.$$

Исследуем найденные стационарные точки.

а) $M_{1,2}(\pm 2, \mp 3)$, $\lambda=2$. Подставляя координаты точек $M_{1,2}$ в продифференцированное уравнение связи, получаем:

$$\pm 8dx \mp 3dy=0 \Leftrightarrow 8dx-3dy=0 \Leftrightarrow dy=\frac{8}{3}\,dx\,.$$

Рассмотрим

$$\left(d^2 f_2\right)_{M_{1,2}}\Big(dx, \frac{8}{3}\,dx\Big)=2dx^2+24dx\cdot\frac{8}{3}\,dx+4\cdot\frac{64}{9}\,dx^2+4\Big(4dx^2+\frac{64}{9}\,dx^2\Big)=$$

$$=82dx^2+\frac{2\cdot 4\cdot 64}{9}\,dx^2>0\,,\ dx\neq 0\,.$$

Следовательно, $M_{1,2}$ — точки локального условного минимума функции f при соотношении связи $4x^2+y^2=25$; $f(M_{1,2})=4-12\cdot 2\cdot 3+2\cdot 9=-50$.

б) $M_{3,4}\Big(\pm\frac{3}{2}, \pm 4\Big)$, $\lambda=-\frac{17}{4}$. Снова подставляем координаты точек в продифференцированное соотношение связи и получаем:

$$\pm 6dx \pm 4dy=0 \Leftrightarrow 3dx+2dy=0 \Leftrightarrow dy=-\frac{3}{2}\,dx\,.$$

Тогда

$$\left(d^2 f_{-\frac{17}{4}}\right)_{M_{3,4}}\Big(dx, -\frac{3}{2}\,dx\Big)=2dx^2-24dx\cdot\frac{3}{2}\,dx+4\cdot\frac{9}{4}\,dx^2-\frac{17}{2}\Big(4dx^2+\frac{9}{4}\,dx^2\Big)=$$

$$=\Big(2-36+9-34-\frac{17\cdot 9}{8}\Big)dx^2<0\,,\ dx\neq 0\,.$$

Значит, $M_{3,4}$ — точки локального условного максимума функции f при заданном соотношении связи;

$$f(M_{3,4})=f\Big(\pm\frac{3}{2}, \pm 4\Big)=\frac{9}{4}+12\cdot\frac{3}{2}\cdot 4+2\cdot 16=\frac{9}{4}+72+32=106\frac{1}{4}\,.$$

25-I. *1 способ.* Областью определения функций $f(x,y)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ и $F(x,y)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{8}$ является множество $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0, y\neq 0\big\}$, т. е. вся плоскость $\mathbb{R}^2$ за исключением обеих координатных осей.

Составим функцию Лагранжа:

$$f_\lambda=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda\Big(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{8}\Big)\,.$$

Находим ее частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2\lambda}{x^3}, \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{2\lambda}{y^3}.$$

Следовательно, для нахождения стационарных точек имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2\lambda}{x^3} = 0 \\ \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2\lambda}{y^3} = 0 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\lambda = 0 \\ y + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\lambda = 0 \\ y = x \\ \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ y = \pm 4 \\ \lambda = -\dfrac{x}{2} = \mp 2 \end{cases}.$$

Итак, имеем две стационарные точки: $M_1(4,4)$ при $\lambda = -2$ и $M_2(-4,-4)$ при $\lambda = 2$.

Находим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$df_\lambda = -\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2} - 2\lambda\Big(\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3}\Big);$$

$$d^2 f_\lambda = \frac{2dx^2}{x^3} + \frac{2dy^2}{y^3} + 6\lambda\Big(\frac{dx^2}{x^4} + \frac{dy^2}{y^4}\Big).$$

Дифференцируем соотношение связи:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{2dx}{x^3} - \frac{2dy}{y^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = 0.$$

а) $M_1(4,4)$, $\lambda = -2$. Подставляем координаты точки M_1 в продифференцированное уравнение связи и получаем взаимосвязь между dx и dy:

$$\frac{dx}{4^3} + \frac{dy}{4^3} = 0 \Leftrightarrow dy = -dx.$$

В $d^2 f_\lambda$ подставляем $x = y = 4$, $\lambda = -2$ и $dy = -dx$:

$$\big(d^2 f_{-2}\big)_{M_1}(dx,-dx) = \frac{2dx^2}{4^3} + \frac{2dx^2}{4^3} - 12\Big(\frac{dx^2}{4^4} + \frac{dx^2}{4^4}\Big) = -\frac{1}{32}\,dx^2 < 0,\ dx \neq 0.$$

Таким образом, M_1 — точка локального условного максимума функции f при заданном соотношении связи; $f(M_1) = f(4,4) = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{2}$.

б) $M_2(-4,-4)$, $\lambda = 2$. Снова подставляем координаты точки M_2 в продифференцированное уравнение связи и получаем:

$$-\frac{dx}{4^3} - \frac{dy}{4^3} = 0 \Leftrightarrow dy = -dx.$$

Тогда

$$\left(d^2 f_2\right)_{M_2}(dx,-dx) = -\frac{2dx^2}{4^3} - \frac{2dx^2}{4^3} + 12\left(\frac{dx^2}{4^4} + \frac{dx^2}{4^4}\right) = \frac{1}{32}\,dx^2 > 0\,,\ dx \neq 0\,.$$

В соответствии с Теоремой 7, M_2 — точка локального условного минимума функции f при заданном уравнении связи; $f(M_2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

2 способ. Задачу можно было технически значительно упростить, введя новые переменные $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$. Тогда необходимо исследовать на условный экстремум функцию $\widetilde{f}(u,v) = 1 + u + v$ при соотношении связи $u^2 + v^2 = \frac{1}{8}$. Функция Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$\widetilde{f}_\lambda = 1 + u + v + \lambda\left(u^2 + v^2 - \frac{1}{8}\right).$$

Ее стационарные точки находятся из системы

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda u = 0 \\ 1 + 2\lambda v = 0 \\ u^2 + v^2 = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2 = \dfrac{1}{8} \\ v = u \\ \lambda = -\dfrac{1}{2u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = \pm\dfrac{1}{4} \\ \lambda = \mp 2 \end{cases}.$$

Таким образом, у нас две стационарные точки: $N_{1,2}\left(\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4}\right)$ при $\lambda = \mp 2$, соответственно.

Продифференцированное уравнение связи выглядит следующим образом: $udu + vdv = 0$. В точках $N_{1,2}$ оно, очевидно, дает одинаковые соотношения для du и dv:

$$\pm\frac{1}{4}\,du \pm \frac{1}{4}\,dv = 0 \Leftrightarrow dv = -du\,.$$

Второй дифференциал функции Лагранжа по сравнению с первым способом значительно упрощается:

$$d^2\widetilde{f}_\lambda = 2\lambda(du^2 + dv^2)\,.$$

Поэтому

$$\left(d^2\widetilde{f}_{\mp 2}\right)_{N_{1,2}}(du,-du) = \mp 8du^2 < (>)0\,,\ du \neq 0\,.$$

Значит, N_1 — точка локального условного максимума функции $\widetilde{f}$, а N_2 — точка локального условного минимума этой функции.

Возвращаясь к исходным переменным x и y, заключаем, что функция f имеет локальный условный максимум и минимум в точках $M_1(4,4)$ и $M_2(-4,-4)$, соответственно.

26-I. В данном случае уравнение связи легко разрешается относительно любой из переменных:

$$x + y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + y\,.$$

Следовательно, исходная задача сводится к задаче безусловного экстремума для функции

$$g(x,y) := f(x,y,x+y) = x^3 - 2y^2 + (x+y)^2 = x^3 + x^2 + 2xy - y^2\,.$$

Данная функция бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^2$ и

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 + 2x + 2y\,, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2x - 2y\,.$$

Поэтому для нахождения стационарных точек имеем систему:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. .$$

Таким образом, у функции g две стационарные точки: $M_1(0,0)$ и $M_2\Big(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\Big)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 6x + 2\,, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -2\,, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2\,.$$

В точке $M_1(0,0)$ получаем, что $a_{11} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(M_1) = 2$, $a_{22} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(M_1) = -2$, $a_{12} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(M_1) = 2$. Значит, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -8 < 0$, так что M_1 не является точкой локального экстремума функции g.

В точке $M_2\Big(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\Big)$ имеем: $a_{11} = -6$, $a_{22} = -2$, $a_{12} = 2$; $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 8 > 0$. Следовательно, M_2 — точка локального максимума функции g. Соответственно, $N\Big(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{3}\Big)$, т. е. $N\Big(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{8}{3}\Big)$ — точка локального условного максимума исходной функции f при соотношении связи $x + y - z = 0$;

$$f(N) = f\Big(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\Big) = -\frac{4^3}{3^3} - 2\cdot\frac{4^2}{3^2} + \frac{8^2}{3^2} = \frac{2\cdot 4^2}{3^3}(-2 - 3 + 2\cdot 3) = \frac{32}{27}\,.$$

27-I. Снова воспользуемся методом исключения. Разрешим уравнение связи относительно z:

$$x + y + z = 12 \Leftrightarrow z = 12 - x - y\,.$$

Подставляя это выражение в исходную функцию f, получаем функцию двух переменных

$$g(x,y) := f(x,y,12-x-y) = x^3y^2(12-x-y)\,,$$

которую необходимо исследовать на безусловный экстремум на множестве $D = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 12-x-y > 0\bigr\}$. Последнее неравенство возникает из-за того, что по условию $z > 0$.

Находим частные производные первого порядка функции g:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y^2\bigl(3x^2(12-x-y) - x^3\bigr)\,, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x^3\bigl(2y(12-x-y) - y^2\bigr)\,.$$

Следовательно, для нахождения стационарных точек получаем систему:

$$\begin{cases} y^2x^2(36-3x-3y-x) = 0 \\ x^3y(24-2x-2y-y) = 0 \\ x > 0, y > 0 \\ 12-x-y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y = 36 \\ 2x+3y = 24 \\ x > 0, y > 0 \\ 12-x-y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Итак, мы имеем единственную стационарную точку $M(6,4)$, удовлетворяющую требуемым условиям.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y^2\bigl(6x(12-x-y) - 6x^2\bigr)\,, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^3\bigl(2(12-x-y) - 4y\bigr)\,,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2y\bigl(3x^2(12-x-y) - x^3\bigr) - 3x^2y^2\,.$$

В точке M получаем, что

$$a_{11} = 16(36\cdot 2 - 6\cdot 36) = -4\cdot 16\cdot 36\,,\ a_{22} = 6^3(2\cdot 2 - 16) = -12\cdot 6^3\,,$$

$$a_{12} = 2\cdot 4(3\cdot 36\cdot 2 - 6^3) - 3\cdot 6^2\cdot 4^2 = -3\cdot 6^2\cdot 4^2\,;$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 4\cdot 16\cdot 36\cdot 12\cdot 6^3 - 3^2\cdot 6^4\cdot 4^4 > 0\,.$$

Таким образом, $M(6,4)$ — точка локального максимума функции g. Значит, $N(6,4,2)$ — точка локального условного максимума функции f при соотношении связи $x+y+z=12$; $f(N) = f(6,4,2) = 6^3\cdot 4^2\cdot 2 = 6912$.

28-I. Используем метод Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$$f_\lambda(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda F(x,y,z) = 3x + 12y - 4z + \lambda(x^2 - y^2 + z^2 + 119)\,.$$

Т. к.

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = 3 + 2\lambda x\,, \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} = 12 - 2\lambda y\,, \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} = -4 + 2\lambda z\,,$$

то для нахождения стационарных точек получаем систему:

$$\begin{cases} 3 + 2\lambda x = 0 \\ 6 - \lambda y = 0 \\ -2 + \lambda z = 0 \\ x^2 - y^2 + z^2 + 119 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2\lambda}\,,\ y = \dfrac{6}{\lambda}\,,\ z = \dfrac{2}{\lambda} \\ \dfrac{9}{4\lambda^2} - \dfrac{36}{\lambda^2} + \dfrac{4}{\lambda^2} + 119 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2\lambda}\,,\ y = \dfrac{6}{\lambda}\,,\ z = \dfrac{2}{\lambda} \\ -\dfrac{119}{4\lambda^2} = -119 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \pm\dfrac{1}{2} \\ x = \mp 3\,,\ y = \pm 12\,,\ z = \pm 4 \end{cases}.$$

Итак, имеем две стационарные точки: $M_1(-3, 12, 4)$ при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ и $M_2(3, -12, -4)$ при $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

Находим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$df_\lambda = 3dx + 12dy - 4dz + 2\lambda(xdx - ydy + zdz)\,,$$

$$d^2 f_\lambda = 2\lambda(dx^2 - dy^2 + dz^2)\,.$$

Дифференцируем соотношение связи:

$$x^2 - y^2 + z^2 + 119 = 0 \Rightarrow 2xdx - 2ydy + 2zdz = 0 \Leftrightarrow xdx - ydy + zdz = 0\,.$$

Подставляя точки $M_{1,2}$ в последнее равенство, получаем:

$$\mp 3dx \mp 12dy \pm 4dz = 0 \Leftrightarrow 3dx + 12dy - 4dz = 0 \Leftrightarrow$$

$$dz = \frac{1}{4}(3dx + 12dy) = \frac{3}{4}\,dx + 3dy\,.$$

Таким образом, выражение для dz одно и то же в случае обеих точек $M_{1,2}$.

Исследуем стационарные точки. В точке M_1

$$\left(d^2 f_{\frac{1}{2}}\right)_{M_1}\left(dx, dy, \frac{3}{4}\,dx + 3dy\right) = dx^2 - dy^2 + \left(\frac{3}{4}\,dx + 3dy\right)^2 = \frac{25}{16}\,dx^2 + \frac{9}{2}\,dxdy + 8dy^2\,.$$

Для полученной квадратичной формы $a_{11} = \dfrac{25}{16}$, $a_{22} = 8$, $a_{12} = \dfrac{9}{4}$, так что

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{25}{2} - \frac{81}{16} = \frac{119}{16} > 0\,.$$

Следовательно, эта форма положительно определена и M_1 — точка локального условного минимума функции f при заданном соотношении связи; $f(M_1) = f(-3,12,4) = -9+144-16 = 119$.

В точке M_2 второй дифференциал будет отличаться только знаком, т. к. $\lambda = -\dfrac{1}{2}$:

$$\left(d^2 f_{-\frac{1}{2}}\right)_{M_1}\left(dx, dy, \frac{3}{4}\,dx + 3dy\right) = -\left(\frac{25}{16}\,dx^2 + \frac{9}{2}\,dxdy + 8dy^2\right) < 0\,,\ dx^2+dy^2 \neq 0\,.$$

Значит, M_2 — точка локального условного минимума функции f при указанном соотношении связи; $f(M_2) = 9-144+16 = -119$.

29-I. Составляем функцию Лагранжа:

$$f_\lambda(x,y,z) = xyz + \lambda(xy+yz+xz-3)\,.$$

Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = yz + \lambda(y+z)\,,\quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} = xz + \lambda(x+z)\,,\quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} = xy + \lambda(x+y)\,.$$

Соответственно, для нахождения стационарных точек имеем систему:

$$\begin{cases} yz + \lambda(y+z) = 0 \\ xz + \lambda(x+z) = 0 \\ xy + \lambda(x+y) = 0 \\ xy + yz + xz = 3 \end{cases}.$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, а также из первого третье, получаем:

$$z(y-x) + \lambda(y-x) = 0 \Leftrightarrow (y-x)(z+\lambda) = 0\,;$$
$$y(z-x) + \lambda(z-x) = 0 \Leftrightarrow (z-x)(y+\lambda) = 0\,.$$

Таким образом, рассматриваемая система распадается на четыре:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x = y = z \\ x^2 + 2\lambda x = 0 \\ 3x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \pm 1 \\ \lambda = -\dfrac{x}{2} = \mp\dfrac{1}{2} \end{cases};$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} x = y = -\lambda \\ xz + \lambda(x+z) = 0 \\ xy + yz + xz = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -\lambda \\ -\lambda z + \lambda(-\lambda+z) = 0 \\ xy + yz + xz = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y = 0 \\ 0 = 3 \end{cases}$$ нет решений.

Системы

$$\text{в)}\ \begin{cases} x = z = -\lambda \\ xy + \lambda(x+y) = 0 \\ xy + yz + xz = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{г)}\ \begin{cases} y = z = -\lambda \\ xz + \lambda(x+z) = 0 \\ xy + yz + xz = 3 \end{cases}$$

аналогичны системе б) и решений не имеют. Значит, у нас две стационарные точки: $M_{1,2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ при $\lambda = \mp\dfrac{1}{2}$.

Находим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$df_\lambda = xydz + xzdy + yzdx + \lambda(xdy + ydx + ydz + zdy + xdz + zdx)\,;$$

$$d^2 f_\lambda = 2xdydz + 2ydxdz + 2zdxdy + 2\lambda(dxdy + dydz + dzdx)\,.$$

Дифференцируем соотношение связи:

$$xy + yz + zx = 3 \Rightarrow xdy + ydx + ydz + zdy + zdx + xdz = 0\,.$$

В точках $M_{1,2}$ одинаково получаем:

$$\pm 2dx \pm 2dy \pm 2dz = 0 \Leftrightarrow dx + dy + dz = 0 \Leftrightarrow dz = -(dx + dy)\,.$$

Подставляя в $d^2 f_\lambda$ точку $M_1(1, 1, 1)$, $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ и $dz = -(dx + dy)$, получаем:

$$\left(d^2 f_{-\frac{1}{2}}\right)_{M_1}(dx, dy, -(dx + dy)) = -2dy(dx + dy) - 2dx(dx + dy) + 2dxdy -$$
$$-\left(dxdy - (dx + dy)^2\right) = -(dx + dy)^2 + dxdy =$$
$$= -(dx^2 + dxdy + dy^2) < 0\,,\ (dx, dy) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\,.$$

Вывод об отрицательной определенности данной квадратичной формы можно сделать из того, что $t^2 + t + 1 > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, а можно по матрице формы, которая имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$. В соответствии с Теоремой 7, M_1 — точка локального условного максимума функции f при заданном соотношении связи; $f(M_1) = f(1, 1, 1) = 1$.

Аналогично проводим исследование в точке $M_2(-1, -1, -1)$, соответствующей $\lambda = \dfrac{1}{2}$:

$$\left(d^2 f_{\frac{1}{2}}\right)_{M_2}(dx, dy, -(dx + dy)) = 2dy(dx + dy) + 2dx(dx + dy) - 2dxdy +$$
$$+\left(dxdy - (dx + dy)^2\right) = dx^2 + dxdy + dy^2 > 0\,,\ (dx, dy) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\,.$$

Значит, M_2 — точка локального условного минимума функции f; $f(M_2) = f(-1, -1, -1) = -1$.

30-I. Составляем функцию Лагранжа:

$$f_\lambda(x, y, z) = xyz - 3yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 18)\,.$$

Поскольку

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = yz + 2\lambda x - 6\lambda\,, \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial y} = xz - 3z + 2\lambda y\,, \quad \frac{\partial f_\lambda}{\partial z} = xy - 3y + 2\lambda z\,,$$

то для нахождения стационарных точек имеем систему:

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x - 6\lambda = 0 \\ xz - 3z + 2\lambda y = 0 \\ xy - 3y + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 18 \end{cases}.$$

Вычитая из второго уравнения системы третье, получаем:

$$x(z-y) - 3(z-y) - 2\lambda(z-y) = 0 \Leftrightarrow (z-y)(x-3-2\lambda) = 0\,.$$

Таким образом, система распадается на две:

$$\text{а)} \begin{cases} z = y \\ y^2 + 2\lambda x - 6\lambda = 0 \\ xy - 3y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 6x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ y^2 + 2\lambda x - 6\lambda = 0 \\ y(x - 3 + 2\lambda) = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 6x = 18 \end{cases} \overset{y>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ x = 3 - 2\lambda \\ y^2 + 2\lambda(3-2\lambda) - 6\lambda = 0 \\ 2y^2 + (3-2\lambda)^2 - 6(3-2\lambda) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ x = 3 - 2\lambda \\ y^2 = 4\lambda^2 \\ 2y^2 + 4\lambda^2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \pm\dfrac{3}{2} \\ x = 3 - 2\lambda \\ y^2 = 9 \\ z = y \end{cases} \overset{x>0,y>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda = -\dfrac{3}{2} \\ x = 6 \\ y = z = 3 \end{cases};$$

$$\text{б)} \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ yz + 2\lambda(3+2\lambda) - 6\lambda = 0 \\ 2\lambda y + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ yz + 4\lambda^2 = 0 \\ \lambda(y+z) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 18 \end{cases}.$$

По третьему уравнению последняя система также распадается на две:

$$\text{б-1)} \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = 3 \\ yz = 0 \\ 9 + y^2 + z^2 - 18 = 18 \end{cases} \overset{y>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = 3 \\ z = 0 \\ y = 3\sqrt{3} \end{cases};$$

$$\text{б-2)} \begin{cases} z = -y \\ x = 3 + 2\lambda \\ -y^2 + 4\lambda^2 = 0 \\ 2y^2 + (3+2\lambda)^2 - 6(3+2\lambda) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = 3 + 2\lambda \\ y^2 = 4\lambda^2 \\ \lambda = \pm\dfrac{3}{2} \end{cases} \overset{x>0,y>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda = \dfrac{3}{2} \\ x = 6 \\ y = 3 \\ z = -3 \end{cases}.$$

Таким образом, имеем три стационарные точки: $M_1(6,3,3)$ при $\lambda = -\frac{3}{2}$, $M_2(3,3\sqrt{3},0)$ при $\lambda = 0$ и $M_3(6,3,-3)$ при $\lambda = \frac{3}{2}$.

Найдем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$df_\lambda = xydz + yzdx + zxdy - 3(ydz + zdy) + \lambda(2xdx + 2ydy + 2zdz - 6dx)\,;$$

$$d^2 f_\lambda = 2xdydz + 2ydzdx + 2zdxdy - 6dydz + 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,.$$

Дифференцируем соотношение связи:

$$x^2+y^2+z^2-6x = 18 \Rightarrow 2xdx+2ydy+2zdz-6dx = 0 \Leftrightarrow (x-3)dx+ydy+zdz = 0\,.$$

а) $M_1(6,3,3)$, $\lambda = -\frac{3}{2}$. Подставляем координаты точки M_1 в продифференцированное соотношение связи:

$$3dx + 3dy + 3dz = 0 \Leftrightarrow dz = -(dx + dy)\,.$$

Рассмотрим

$$\left(d^2 f_{-\frac{3}{2}}\right)_{M_1}(dx, dy, -dx-dy) = -12dy(dx+dy)-6dx(dx+dy)+6dxdy+6dy(dx+dy)-$$
$$-3(dx^2 + dy^2 + (dx + dy)^2) = -3dx^2 - 3dy^2 + 6dxdy - 9(dx + dy)^2 =$$
$$= -12(dx^2 + dxdy + dy^2)\,.$$

Ясно, что полученная квадратичная форма отрицательно определена, так что M_1 — точка локального условного максимума функции f при заданном соотношении связи. При этом $f(M_1) = f(6,3,3) = 27$.

б) $M_2(3,3\sqrt{3},0)$, $\lambda = 0$. Для dx, dy и dz получаем соотношение:

$$3\sqrt{3}dy = 0 \Leftrightarrow dy = 0\,.$$

Рассматриваем

$$(d^2 f_0)_{M_2}(dx, 0, dz) = 6\sqrt{3}\,dzdx\,.$$

Данная квадратичная форма, очевидно, является неопределенной, т. к. ее матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$. Значит, точка M_2 не является точкой локального условного экстремума функции f.

в) $M_3(6,3,-3)$, $\lambda = \frac{3}{2}$. Для dx, dy и dz в точке M_3 получаем следующую взаимосвязь:

$$3dx + 3dy - 3dz = 0 \Leftrightarrow dz = dx + dy\,.$$

Тогда имеем:

$$\left(d^2 f_{\frac{3}{2}}\right)_{M_3}(dx, dy, dx+dy) = 12dy(dx+dy)+6dx(dx+dy)-6dxdy-6dy(dx+dy)+$$

$$+3(dx^2 + dy^2 + (dx + dy)^2) = 3dx^2 + 3dy^2 - 6dxdy + 9(dx + dy)^2 =$$
$$= 12(dx^2 + dxdy + dy^2)\,.$$

Получена положительно определенная квадратичная форма, так что M_3 — точка локального условного минимума функции f; $f(M_3) = f(6, 3, -3) = -27$.

31-I. В данном случае у нас два соотношения связи, причем второе не получится корректно разрешить относительно какой-либо из переменных. Будем использовать метод Лагранжа. Т. к. задано два уравнения связи, то в функции Лагранжа будет два множителя Лагранжа, которые мы для удобства обозначим не λ_1 и λ_2, а λ и μ:

$$f_{\lambda,\mu}(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z) =$$
$$= xyz + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\,.$$

Поскольку

$$\frac{\partial f_{\lambda,\mu}}{\partial x} = yz + \lambda + 2\mu x\,, \quad \frac{\partial f_{\lambda,\mu}}{\partial y} = xz + \lambda + 2\mu y\,, \quad \frac{\partial f_{\lambda,\mu}}{\partial z} = xy + \lambda + 2\mu z\,,$$

то для нахождения стационарных точек имеем систему:

$$\begin{cases} yz + \lambda + 2\mu x = 0 \\ xz + \lambda + 2\mu y = 0 \\ xy + \lambda + 2\mu z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - x)(z - 2\mu) = 0 \\ (z - y)(x - 2\mu) = 0 \\ xy + \lambda + 2\mu z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}.$$

Система распадается на четыре:

$$\text{а)} \begin{cases} x = y = z \\ xy + \lambda + 2\mu z = 0 \\ 3x = 0 \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{нет решений;}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x = y = 2\mu \\ 4\mu^2 + \lambda + 2\mu z = 0 \\ 4\mu + z = 0 \\ 8\mu^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2\mu \\ z = -4\mu \\ 24\mu^2 = 1 \\ \lambda = 4\mu^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{6} \\ \mu = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{6}} \\ x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ z = \mp\dfrac{2}{\sqrt{6}} \end{cases}.$$

Таким образом, при $\lambda = \dfrac{1}{6}$ и $\mu = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ имеем соответственно стационарные точки $M_{1,2}\Big(\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \mp\dfrac{2}{\sqrt{6}}\Big)$.

В случаях в) $y = z = 2\mu$ и г) $x = z = 2\mu$, естественно, мы получим системы, аналогичные системе б). Их решениями при тех же λ и μ будут точки $M_{3,4}\Big(\mp\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Big)$ и $M_{5,6}\Big(\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \mp\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Big)$.

Понятно, что из шести найденных стационарных точек достаточно изучить точки $M_{1,2}$.

Находим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$df_{\lambda,\mu} = xydz + yzdx + zxdy + \lambda(dx + dy + dz) + 2\mu(xdx + ydy + zdz)\,;$$

$$d^2 f_{\lambda,\mu} = 2xdydz + 2ydzdx + 2zdxdy + 2\mu(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,.$$

Дифференцируем оба уравнения связи:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx + dy + dz = 0 \\ xdx + ydy + zdz = 0 \end{cases}.$$

В точке $M_1\Big(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\Big)$ при $\lambda = \dfrac{1}{6}$ и $\mu = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ получаем, что

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}dx + \dfrac{1}{\sqrt{6}}dy - \dfrac{2}{\sqrt{6}}dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx + dy + dz = 0 \\ dx + dy - 2dz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy = -dx \\ dz = 0 \end{cases}.$$

Подставляем координаты точки M_1, значение μ и $dy = -dx$, $dz = 0$ в $d^2 f_{\lambda,\mu}$:

$$\big(d^2 f_{(\frac{1}{6},\frac{1}{2\sqrt{6}})}\big)_{M_1}(dx, -dx, 0) = \frac{4}{\sqrt{6}}dx^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}dx^2 = \sqrt{6}dx^2 > 0\,,\ dx \neq 0\,.$$

Значит, M_1 — точка локального условного минимума функции f при заданных соотношениях связи. Аналогично, точками условных минимумов будут и точки M_3 и M_5. При этом $f(M_1) = f(M_3) = f(M_5) = -\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

В точке $M_2\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\Big)$ при $\lambda = \dfrac{1}{6}$ и $\mu = -\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$, понятно, имеем те же соотношения для dx, dy и dz: $dy = -dx$, $dz = 0$. В целом,

$$\big(d^2 f_{(\frac{1}{6},-\frac{1}{2\sqrt{6}})}\big)_{M_2}(dx, -dx, 0) = -\sqrt{6}dx^2 < 0\,,\ dx \neq 0\,.$$

Следовательно, M_2 — точка локального условного максимума функции f. То же самое касается и точек M_4 и M_6. Экстремальные значения $f(M_2) = f(M_4) = f(M_6) = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

Литература

1. *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 Кн. Кн. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: Учеб. пособие для университетов, пед. вузов / Под редакцией В.А. Садовничего. М.: Высшая школа, 2000. 725 с.

2. *Горина О.В., Калиниченко Л.И.* Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Метод. указания. Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1992. 40 с.

3. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит., 1990. 624 с.

4. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учеб. пособие для вузов / Под редакцией Л.Д. Кудрявцева. Санкт-Петербург, 1994. 496 с.

Содержание