Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О.А.Иванова, Ю.С.Налбандян

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по курсу
«Высшая математика»
(направление обучения «Социология»)
Часть 2. Элементы аналитической геометрии
и линейного программирования

Ростов-на-Дону
2018

Методические указания разработаны кандидатом физико-математических наук, старшим преподавателем кафедры математического анализа О.А.Ивановой и кандидатом физико-математических наук, доцентом кафедры математического анализа Ю.С.Налбандян.

Ответственный редактор канд. физ.-матем. наук М.А.Шубарин

Компьютерный набор и верстка канд. физ.-матем. наук Ю.С.Налбандян

Печатается в соответствии с решением кафедры математического анализа Института математики, механики и компьютерных наук, протокол № 4 от 16 января 2018 года.

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Высшая математика», предназначенный для студентов направления «социология», решает такие важные задачи, как ознакомление студентов с основными понятиями математических дисциплин, которые необходимы для решения теоретических и практических задач социологии; развитие навыков работы с литературой, абстрактного мышления и умения строго излагать свои мысли. Кроме того, он способствует подготовке обучающихся к практическому применению полученных знаний. В связи с вышесказанным основное внимание уделяется практическим занятиям и самостоятельной работе студентов, организации которых и должно способствовать данное методическое пособие.

Во вторую часть включены разделы, которые изучаются в второй половине первого семестра. Для освоения этого материала необходимы школьные знания основ евклидовой геометрии и некоторые базовые понятия линейной алгебры. Как и ранее, в каждом из параграфов есть необходимые теоретические положения, разобранные «типовые» задачи и упражнения для самостоятельного решения, позволяющие закрепить полученные навыки.

План проведения практических занятий сообщается студентам в начале семестра, поэтому перед каждым занятием рекомендуется разобрать указанные преподавателем разделы лекций и соответствующие разделы учебников и учебных пособий, а также выписать определения, формулы, утверждения¸ которые потребуются для решения задач по заданной тематике. После занятия перед выполнением домашнего задания желательно просмотреть задачи, разобранные в аудитории, попробовать самостоятельно восстановить их решения, и только после этого, убедившись в том, что материал освоен, перейти к решению новых задач. При необходимости - обращаться к рекомендованной литературе, обращая особое внимание на разобранные примеры.

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

1.1. Предварительные сведения. Всюду далее предполагается, что на плоскости задана декартова (прямоугольная) система координат с осями *OX, OY* и началом координат в точке *O(0;0).* Рассматриваются две произвольные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

Расстояние от точки $A(x_1, y_1)$ *до начала координат* задается формулой

$$|OA| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,, \qquad \textbf{(1.1a)}$$

расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ – формулой

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad \textbf{(1.1b)}$$

Координаты точки C (середины отрезка [AB]) можно найти по формуле

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad \textbf{(1.2)}$$

Если соединить точки *O, A* направленным отрезком, получим *вектор* $\overline{OA} = (x_1, y_1)$, *длина которого* задается формулой (1.1a). Аналогично можно рассмотреть *и вектор* $\overline{AB}$, *координаты которого* определяются соотношением $\overline{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$, а *длина* – формулой (1.1b).

1.2. Прямая на плоскости. Среди различных уравнений прямой на плоскости наиболее распространенными можно считать следующие.

Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 > 0 \qquad \textbf{(1.3)}$$

где *A, B, C* – вещественные числа (неравенство $A^2 + B^2 > 0$ означает, что коэффициенты *A* и *B* не обращаются в нуль одновременно). Вектор $\overline{n} = (A; B)$ называется *вектором нормали* и перпендикулярен данной прямой.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом представляет собой уравнение, разрешенное относительно *y*:

$$y = kx + b. \qquad \textbf{(1.4)}$$

Здесь вещественное число b – это ордината точки пересечения прямой и оси *OY*, вещественное число k – это угловой коэффициент прямой (тангенс угла, который прямая образует с положительным направлением оси *OX*). При $k=0$ получается уравнение прямой $y = b$, проходящей через точку с координатами $(0;b)$ параллельно оси *OX* (при $b=0$ это уравнение самой оси *OX* $y = 0$), при $k>0$ прямая образует с осью *OX* острый угол, при $k<0$ – тупой.

Замечание. Следует отдельно рассмотреть прямую, заданную уравнением $x=a$ (a – вещественное число). Она проходит через точку с координатами $(a;0)$ параллельно оси *OY* (при $a=0$ получаем уравнение оси *OY*) и образует с осью *OX* угол в 90^0. Угловой коэффициент такой прямой не определен!

Уравнение прямой в отрезках записывается в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad \textbf{(1.5)}$$

где a и b – соответствующие координаты точек пересечения прямой с осью *OX* (точка $A(a;0)$) и *OY* (точка $B(0;b)$). Например, прямая $x - \frac{y}{2} = 1$ проходит через точки $A(1;0)$ и $B(0;-2)$; прямая $5y + 3x = 1$ через точки $A(1/3;0)$ и $B(0;1/5)$ (так как уравнение $5y + 3x = 1$ равносильно уравнению $\frac{x}{1/3} + \frac{y}{1/5} = 1$).

Если заданы точка $A(x_1, y_1)$, лежащая на прямой, и $\bar{l} = (m;n)$ - *направляющий вектор* прямой (т.е. вектор, параллельный прямой), то *каноническое уравнение прямой* на плоскости имеет вид

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}. \qquad \textbf{(1.6)}$$

Если в (1.6) ввести параметр t ($\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=t$), то получим *параметрическое уравнение прямой*

$$\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty), \qquad \textbf{(1.7)}$$

где, как и ранее, $A(x_1, y_1)$ - точка, лежащая на прямой, а $\bar{l} = (m; n)$ - направляющий вектор.

Пример 1.1. Дана прямая $5y-3x-2=0$. Выписать ее вектор нормали, найти угловой коэффициент, построить прямую на плоскости. Привести уравнение прямой к параметрическому виду, выписать направляющий вектор.

Решение. Сравнивая уравнение данной прямой с (1.3), замечаем, что в нашем случае $A=-3$ (коэффициент при x), $B=5$ (коэффициент при y), поэтому $\bar{n}=(-3;5)$. Чтобы найти угловой коэффициент, исходное уравнение необходимо разрешить относительно *y:* $5y=3x+2$ и $y=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}$**.** Сравнивая последнее уравнение с уравнением (1.4), замечаем, что *k=3/5.*

Как известно, для построения прямой необходимо знать координаты двух точек, через которые проходит прямая. Задавая значения *x* в $y=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}$**,** можно найти соответствующие значения *y*: $x=0 \Rightarrow y=0+\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$; $x=1 \Rightarrow y=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$. Итак, остается провести прямую, проходящую через точки *A(0; 2/5), B(1; 1).*

Для параметризации можно в качестве параметра t рассмотреть одну из координат. Так, полагаем $x=t$ и с учётом уравнения $y=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}$ получаем:

$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{5}t + \frac{2}{5} \end{cases}$ $t \in (-\infty; +\infty)$. Направляющий вектор при этом имеет вид $\bar{l}=(1;3/5)$.

Вторым примером параметризации является $\begin{cases} x = \dfrac{5}{3}t - \dfrac{2}{3} \\ y = t \end{cases}$ $t \in (-\infty; +\infty)$ (проверьте!), а направляющим вектором является вектор $\bar{l} = (5/3;1)$ (обратите внимание, что он пропорционален предыдущему вектору!).

Пример 1.2. Для прямой, заданной параметрическим уравнением $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -3t \end{cases}$ $t \in (-\infty; +\infty)$, выписать направляющий вектор, координаты двух точек, лежащих на прямой, координаты вектора нормали и угловой коэффициент.

Решение. В соответствии с уравнением (1.7) $\bar{l} = (1;-3)$, а точка *A(-2;0)* лежит на прямой. Чтобы найти координаты второй точки, лежащей на прямой, зададим какое-нибудь значение параметра *t*. В частности, при *t=1* *x=–1*, *y=–3*, т.е. точка *B(-1;-3)* принадлежит прямой.

Вектор нормали связан с общим уравнением прямой, а чтобы перейти к нему, необходимо в одном из заданных уравнений выразить *t* через *x* и полученное выражение подставить во второе уравнение. Например, из первого уравнения $t = x + 2$, поэтому $y = -3t = -3x - 6$. Далее, $y + 3x + 6 = 0$ и $\bar{n} = (3;1)$.

Наконец, для определения углового коэффициента выражаем у ($y = -3x - 6$) и получаем, что $k = -3$.

Пример 1.3. Привести к уравнению в отрезках прямую, заданную общим уравнением $2y - 3x + 6 = 0$.

Решение. Проведем преобразования общего уравнения, чтобы полученное выражение соответствовало (1.5):

$$2y - 3x + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x - 2y = 6 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1.$$

Последнее уравнение и есть искомое уравнение в отрезках. При этом прямая проходит через точки (2;0) и (0;-3).

1.3. Угол φ между прямыми. Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом ($y = k_1 x + b_1,\ y = k_2 x + b_2$), то угол между ними определяется с помощью формулы

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{k_2 k_1 + 1}. \qquad \textbf{(1.8)}$$

Из (1.8) вытекают *условия параллельности* $(k_1 = k_2)$ и *перпендикулярности двух прямых* $(k_1 k_2 = -1)$.

Пример 1.4. Выбрать из прямых (I) – (V) параллельные и перпендикулярные, определить угол между прямыми (I) и (VI):

(I) $y - 3x - 2 = 0$; (II) $2x + 6y = 0$; (III) $3x - y = 5$;

(IV) $x - 3y + 3 = 0$; (V) $x + 3y - 7 = 0$; (VI) $x + y = 2$.

Решение. Сначала для каждой прямой найдем угловой коэффициент:

(I): $y - 3x - 2 = 0 \Rightarrow y = 3x + 2 \Rightarrow k_1 = 3$;

(II): $2x + 6y = 0 \Rightarrow 6y = -2x \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{3}$;

(III) $3x - y = 5 \Rightarrow y = 3x - 5 \Rightarrow k_3 = 3$;

(IV) $x - 3y + 3 = 0 \Rightarrow 3y = x + 3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow k_4 = \frac{1}{3}$;

(V) $x + 3y - 7 = 0 \Rightarrow 3y = -x + 7 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \Rightarrow k_5 = -\frac{1}{3}$;

(VI) $x + y = 2 \Rightarrow y = -x + 2 \Rightarrow k_6 = -1$.

Поскольку $k_1 = k_3,\ k_2 = k_5$, получаем, что прямые (I) и (III), (II) и (V) параллельны. С другой стороны, $k_1 k_2 = -1$, а потому прямые (I) и (II) перпендикулярны (значит, перпендикулярны и прямые (III) и (II), (I) и (V), (III) и (V)).

Чтобы найти тангенс угла между прямыми (I) и (VI), воспользуемся формулой (1.8): $\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_6 - k_1}{k_6 k_1 + 1} = \frac{-1-3}{(-1)\cdot 3 + 1} = 2$. Но тогда $\varphi = arctg 2$.

1.4. Точка пересечения прямых. Если точка лежит на прямой, то её координаты должны удовлетворять уравнению прямой. Точка пересечения прямых – это точка, удовлетворяющая всем уравнениям прямых, которые в ней пересекаются. Значит, чтобы найти её координаты, необходимо решить систему соответствующих уравнений. При этом можно использовать метод исключения неизвестных, изученные ранее методы решения систем линейных алгебраических уравнений или, выразив одно из неизвестных через другое в любом уравнении, подставить полученное выражение в оставшееся уравнение.

Пример 1.5. Найти точку пересечения прямых $2x+3y-3=0$ и $x-2y-5=0$.

Решение. Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} 2x+3y-3=0 \\ x-2y-5=0 \end{cases}$. Из второго уравнения $x=2y+5$, подставляем полученное выражение в первое уравнение: $2(2y+5)+3y-3=0$, $7y+7=0$, $y=-1$. Возвращаемся к выражению для x: $x=2y+5=2(-1)+5=3$. Итак, точка пересечения заданных прямых – A(3;-1).

1.5. Составление уравнений прямых на плоскости. Рассмотрим основные типы возникающих задач.

1) *Записать уравнение прямой с известным угловым коэффициентом* k, *проходящей через заданную точку* $A(x_1, y_1)$. Ответом является уравнение

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad \textbf{(1.9)}$$

Пример 1.6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A(2,-3)* и образующей с положительным направлением оси *OX* угол *120⁰*.

Решение. Координаты точки известны, а угловой коэффициент k - это тангенс угла наклона, т.е. $k=\mathrm{tg}120^0=-\sqrt{3}$. Подставляя в (1.9), получаем: $y-(-3)=-\sqrt{3}(x-2)$ или $y+\sqrt{3}x+(3-2\sqrt{3})=0$.

2) *Записать уравнение прямой, проходящей через точку* $A(x_1, y_1)$ *параллельно прямой* $y = k_1 x + b$. Для решения используем уравнение (1.9) и учтем, что угловые коэффициенты параллельных прямых совпадают:

$$y - y_1 = k_1(x - x_1). \qquad \textbf{(1.10)}$$

3) *Записать уравнение прямой, проходящей через точку* $A(x_1, y_1)$ *перпендикулярно прямой* $y = k_1 x + b$. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 k = -1$, поэтому $k = -1/k_1$. Остается подставить это в (1.9) и получить уравнение:

$$y - y_1 = \frac{-1}{k_1}(x - x_1). \qquad \textbf{(1.11)}$$

Пример 1.7. Составить уравнения прямых, проходящих через точку *A(2,-3)* параллельно и перпендикулярно прямой $2y + 4x - 5 = 0$.

Решение. Так как $y = \dfrac{-4x+5}{2} = -2x + \dfrac{5}{2}$, то угловой коэффициента данной прямой $k_1 = -2$. Чтобы составить уравнение параллельной прямой, проходящей через *A(2,-3)*, воспользуемся (1.10): $y - (-3) = -2(x - 2)$ или $y + 2x - 1 = 0$. Результат можно проверить, подставив в полученное выражение координаты заданной точки: $-3 + 2 \cdot 2 - 1 \equiv 0$ (получили тождество, значит, всё верно).

Аналогично действуем при составлении уравнения перпендикулярной прямой, только используем (1.11): $y - (-3) = \dfrac{-1}{-2}(x - 2)$, $2(y + 3) = x - 2$, и окончательно $2y - x + 8 = 0$. *Проверка*: $2 \cdot (-3) - 2 + 8 \equiv 0$.

4) *Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}. \qquad \textbf{(1.12)}$$

Пример 1.8. Написать уравнение прямой, проходящей через точки *A(3;7), B(-1;5).*

Решение. Подставляя в (1.12) координаты данных точек, получаем:

$$\frac{y-5}{7-5}=\frac{x-(-1)}{3-(-1)} \Rightarrow \frac{y-5}{2}=\frac{x+1}{4} \Rightarrow 2(y-5)=(x+1).$$

Собирая теперь всё в одну сторону, приходим к уравнению $2y-x-11=0$ (проверьте справедливость уравнения, как это сделано в примере 1.7!).

Пример 1.9. В треугольнике с вершинами *O(0;0), A(3;3), B(-1;5)* найти уравнения стороны *AB,* медианы *AE* и высоты *OK,* а также длину высоты *OK.*

Решение. Уравнение стороны *AB* составляем, используя формулу (1.12): $\frac{y-5}{3-5}=\frac{x-(-1)}{3-(-1)} \Rightarrow \frac{y-5}{-2}=\frac{x+1}{4} \Rightarrow 2(y-5)=-(x+1)$, откуда $2y+x-9=0$.Далее, по определению медианы треугольника точка *E* – середина отрезка *BO,* поэтому ее координаты можно найти по формуле (1.2):

$$x_E=\frac{x_B+x_O}{2}=\frac{-1+0}{2}=-\frac{1}{2}, \quad y_E=\frac{y_B+y_O}{2}=\frac{5+0}{2}=\frac{5}{2}.$$

Таким образом, теперь надо составить уравнение прямой, проходящей через точки *A(3;3)* и *E(-1/2;5/2).* Подставляем их координаты в (1.12):

$$\frac{y-5/2}{3-5/2}=\frac{x-(-1/2)}{3-(-1/2)} \Rightarrow \frac{2y-5}{1}=\frac{2x+1}{7} \Rightarrow 14y-35=2x+1 \Rightarrow 7y-x-18=0.$$

Итак, уравнение медианы *AE* имеет вид $7y-x-18=0$.

Далее, высота *OK* – это прямая, проходящая через вершину *O* перпендикулярно прямой *AB.* Воспользуемся уравнением (1.11). Угловой коэффициент k_1 прямой *AB* находим из уравнения $2y+x-9=0$: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$, поэтому $k_1=-1/2$. Тогда имеем: $y-0=\frac{-1}{-1/2}(x-0)$, и уравнение высоты *OK* $y=2x$.

Теперь найдем координаты K – точки пересечения построенной высоты и прямой AB. Решаем систему уравнений: $\begin{cases} 2y + x - 9 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 9 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9/5 \\ y = 18/5 \end{cases}$.

Итак, $K\left(\frac{9}{5};\frac{18}{5}\right)$, и в силу (1.1a) $|OK| = \sqrt{\frac{9}{25}^2 + \frac{18}{25}^2} = \sqrt{\frac{81+324}{25}} = \sqrt{\frac{81\cdot 5}{25}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$.

Замечание. Длину высоты OK можно рассматривать как расстояние от точки O до прямой AB. Можно вывести общую формулу, которая позволяет быстро вычислять расстояние от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой $ax + by + c = 0$ и имеет вид

$$\mathrm{d} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad \textbf{(1.13)}$$

Если воспользоваться этой формулой для решения задачи, не возникнет необходимости искать точку пересечения высоты OK и прямой AB, достаточно в (1.13) рассмотреть точку $O(0;0)$ и прямую $2y + x - 9 = 0$ (для нее $a = 1, b = 2$):

$\mathrm{d} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|0 + 0 - 9|}{\sqrt{1+4}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ (сравните ответ с полученным ранее!).

1.6. Задания для самостоятельного решения.

Упражнение 1.1. Найти длины сторон и координаты точек, лежащих на серединах сторон, для треугольника с вершинами: **a)** *A(2;0), B(4;3), C(3;6);* **b)** *A(2;-1), B(4;3), C(-2;1);* **c)** *A(-2;4), B(5;-1), C(2;3).*

Упражнение 1.2. Найти координаты вершин и длины медиан в треугольнике, стороны которого заданы уравнениями: **a)** $2y + x = 0$, $x + 4y - 6 = 0$, $x - 4y = 0$; **b)** $y + x = 4$, $3x - y = 0$, $x - 3y - 8 = 0$.

Упражнение 1.3. Написать каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через указанную точку параллельно заданному вектору, привести уравнение к общему виду, найти вектор нормали и угловой коэффициент прямой: **a)** *A(2;3),* $\bar{l}=(4;-1)$; **b)** *A(-1;5),* $\bar{l}=(1;3)$; **c)** *A(-2;3),* $\bar{l}=(-1;-2)$.

Упражнение 1.4. Для прямой, заданой параметрическим уравнением, выписать координаты направляющего вектора и координаты двух точек, лежащих на этой прямой; записать каноническое уравнение этой прямой:

a) $\begin{cases} x=3t \\ y=1+5t \end{cases}, t\in(-\infty;+\infty)$; **b)** $\begin{cases} x=3+2t \\ y=1-t \end{cases}, t\in(-\infty;+\infty)$; **c)** $\begin{cases} x=5-2t \\ y=1 \end{cases}, t\in(-\infty;+\infty)$.

Упражнение 1.5. Для прямой, заданной уравнением в общем виде, выписать параметрическое и каноническое уравнения, указать координаты направляющего вектора: **a)** $2x+3y+8=0$; **b)** $3y+x-5=0$; **c)** $2x+y+7=0$.

Упражнение 1.6. Для прямых, заданных уравнениями в общем виде, выписать вектор нормали, определить угловой коэффициент, привести уравнения к виду «уравнение» в отрезках и построить прямые:

a) $3x+4y=12$; **b)** $2x-3y+6=0$; **c)** $3y+x-5=0$.

Упражнение 1.7. Определить угол между прямыми:

a) $x+y=1$, $2x-y=0$; **b)** $5x-y=7$, $3x+2y=0$; **c)** $2x+6y-3=0$, $x=3y$.

Упражнение 1.8. Найти параллельные и перпендикулярные прямые:

a) $2y-3x-2=0$, $6x-4y=9$, $6x+4y=5$, $2x+3y+8=0$;

b) $2x-y-1=0$, $x+2y+8=0$, $6x+12y=-3$, $2x+y=0$;

c) $y+3x=3$, $3x-9y-5=0$, $x+3y=2$, $6x-2y-1=0$.

Упражнение 1.9. Написать уравнение прямой, проходящей через заданную точку А и образующей с положительным направлением оси ОХ угол φ.

1) *A(2;3),* $\varphi=45^0$; **2)** *A(-4;5),* $\varphi=30^0$; **3)** *A(-1;-3),* $\varphi=135^0$;

4) *A(5;-6),* $\varphi=120^0$; **5)** *A(0;0),* $\varphi=60^0$; **6)** *A(-1;0),* $\varphi=45^0$

Упражнение 1.10. Написать уравнение прямой, проходящей через точки *A* и *B*, выписать ее угловой коэффициент и координаты вектора нормали:

1) *A(-1;3), B(4;-2);* **2)** *A(1;3), B(4;-3);* **3)** *A(3;2), B(2;-1);*

4) *A(1;-3), B(-1;5);* **5)** *A(2;3), B(2;-2);* **6)** *A(4;5), B(-3;5).*

Упражнение 1.11. Написать уравнения прямых, проходящих через заданную точку параллельно и перпендикулярно заданной прямой.

1) *A(2;3),* $2y-3x-2=0$; **2)** *A(-1;5),* $x+2y+8=0$;

3) *A(3;-6),* $2x+3y+8=0$; **4)** *A(-5;-6),* $6x-4y=9$;

5) *A(-2;0),* $6x+2y-1=0$; **6)** *A(0;3),* $3x-9y-5=0$.

Упражнение 1.12. Написать уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно заданной прямой, найти точку пересечения прямых:

a) *A(-3;2),* $y+3x=3$; **b)** *A(1;-5),* $3x-2y+8=0$; **c)** *A(0;-3),* $6x+9y-5=0$.

Упражнение 1.13. Найти координаты вершин треугольника, образованного прямыми $x+2y=9$, $x=y$, $5x+y=0$. Построить треугольник, найти тангенсы его углов и координаты точки пересечения высот.

Упражнение 1.14. Найти координаты точки пересечения медиан в треугольнике с вершинами *A(-4;2), B(2;-5), C(5;0).*

Упражнение 1.15. В треугольнике с заданными вершинами найти уравнения сторон и высот, длины высот, медиан и средних линий:

a) *A(5;3), B(2;3), C(0;-3);* **b)** *A(-3;7), B(7;1), C(-1;-1).*

Упражнение 1.16. Найти расстояние от заданной точки М до заданной прямой: 1) *M(1;2),* $6x+8y-35=0$; 2) *M(-2;3),* $6x+2y-1=0$.

Упражнение 1.17. Доказать, что прямые параллельны и найти расстояние между ними: 1) $6x-8y+27=0$ и $3x-4y-6=0$; 2) $15x+36y-105=0$ и $5x+12y+30=0$.

§ 2. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Уравнения прямой и плоскости в пространстве. В пространстве уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 > 0) \qquad \textbf{(2.1)}$$

задает плоскость, при этом вектор $\overline{N} = (A; B; C)$ перпендикулярен рассматриваемой плоскости и называется вектором нормали.

Прямая в пространстве определяется как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.2)}$$

(плоскости не могут быть параллельны, т.е. коэффициенты A_1, B_1, C_1 не могут быть пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2). Уравнения (2.2) называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}, \qquad \textbf{(2.3а)}$$

а *параметрические* –

$$\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt \quad t \in (-\infty; +\infty), \\ z = z_1 + pt \end{cases} \qquad \textbf{(2.3б)}$$

где, как и ранее, $A(x_1; y_1; z_1)$ – точка, лежащая на прямой, а $\bar{l} = (m; n; p)$ - *направляющий вектор* прямой.

Пример 2.1. Написать параметрические, канонические и общие уравнения прямой, проходящей через точки *A(-1;2;4)* и *B(2;5;3)*.

Решение. В качестве точки, лежащей на плоскости, можно взять любую из заданных; пусть, для определенности, это будет точка *A*. Направляющим вектором прямой является вектор $\overline{AB}$, координаты которого находятся по правилу, аналогичному сформулированному для плоскости в конце п.1.1:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (2-(-1);(5-2);3-4) = (3;3;-1).$$

Таким образом, $A(-1;2;4)$, $\bar{l} = (3;3;-1)$ и в силу (2.3б) параметрические уравнения имеют вид $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad t \in (-\infty;+\infty)$.

Чтобы составить общие уравнения, необходимо из одного из параметрических уравнений выразить *t* и подставить полученное выражение в оставшиеся уравнения. Например, в данном примере из третьего уравнения получаем $t=4-z$, и поэтому $\begin{cases} x = -1 + 3(4-z) \\ y = 2 + 3(4-z) \end{cases}$ или окончательно $\begin{cases} x + 3z - 11 = 0 \\ y + 3z - 14 = 0 \end{cases}$.

Канонические уравнения выписываем по формуле (2.3а):

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{-1}.$$

Замечание 1. При составлении параметрического уравнения можно было в качестве направляющего вектора взять $\overline{BA}$, а в качестве лежащей на прямой точки – *B*.

Замечание 2. При составлении канонических уравнений прямой, проходящей через точки $A(x_A;y_A;z_A)$ и $B(x_B;y_B;z_B)$, можно использовать правило

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \qquad \textbf{(2.4)}$$

(проверьте, что при применении (2.4) в примере 2.1 получается тот же самый результат, что и при использовании (2.3а)).

2.2. Некоторые полезные формулы. Как следует из сказанного выше, прямая в пространстве однозначно определяется лежащей на ней точкой

$A(x_1; y_1; z_1)$ и направляющим вектором $\bar{l} = (m; n; p)$. Следовательно, *угол между двумя прямыми* можно рассматривать как угол между их направляющими векторами. Предположим, что $\bar{l}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ – направляющий вектор одной прямой, $\bar{l}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ – направляющий вектор второй прямой. Тогда косинус интересующего нас угла находим по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overline{l_1} \cdot \overline{l_2}}{|\overline{l_1}| \cdot |\overline{l_2}|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad \textbf{(2.5)}$$

Угол между плоскостями $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ можно рассматривать как угол между их нормалями, а косинус этого угла вычислять по формуле

$$\cos\psi = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ *до плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ находим по формуле

$$\mathrm{d} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Для определения *расстояния от точки* $M(x_0, y_0, z_0)$ *до прямой* $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ используем формулу

$$\delta = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ p & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad \textbf{(2.8)}$$

Наконец, уравнение плоскости, проходящей через три заданных точки $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ (а такая плоскость – единственная!), можно получить из уравнения

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0 \qquad \textbf{(2.9)}$$

Пример 2.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(2;3;-1), B(-1; 5;1), C(3; 3; 2), выписать вектор нормали.

Решение. Подставим в (2.9) координаты заданных точек и раскроем определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-(-1) \\ -1-2 & 5-3 & 1-(-1) \\ 3-2 & 3-3 & 2-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=(x-2)(6-0)-(y-3)(-9-2)+(z+1)(0-2)=0;$$

$$6x-12+11y-33-2z-2=0$$

и окончательно: $6x+11y-2z-47=0$. Вектор нормали этой плоскости имеет вид $\overline{N}=(6;11;-2)$

Замечание. Для проверки достаточно последовательно подставить в полученное уравнение координаты всех точек и убедиться, что каждый раз уравнение превращается в тождество. Например, для точки A(2;3;-1): 12+33+4-47≡0.

Пример 2.3. Найти угол между плоскостями $x-2y-7z+1=0$ и $6x+11y-2z-47=0$.

Решение. Вектор нормали первой плоскости имеет вид $\overline{N_1}=(1;-2;-7)$, второй $-\overline{N}_2=(6;11;-2)$. Применяем формулу (2.6):

$$\cos\psi=\frac{1\cdot 6+(-2)\cdot 11+(-7\cdot)(-2)}{\sqrt{1+4+49}\cdot\sqrt{36+121+4}}=\frac{-2}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{161}}.$$

Пример 2.4. Найти угол между прямой, заданной каноническим уравнением $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{-1}$, и осью OY.

Решение. Направляющий вектор заданной прямой $\bar{l}_1=(3;3;-1)$, в качестве направляющего вектор оси OY рассмотрим вектор $\bar{l}_2=(0;1;0)$. Тогда по формуле (2.5) $\cos\varphi=\frac{0+3+0}{\sqrt{9+9+1}\cdot\sqrt{0+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{19}}$.

Пример 2.5. Доказать, что прямые $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{-1}$ и $\frac{x}{-6}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z-1}{2}$ параллельны и найти расстояние между ними.

Решение. Направляющий вектор первой прямой $\bar{l}_1=(3;3;-1)$, направляющий вектор второй прямой $\bar{l}_2=(-6;-6;2)$, причем $\bar{l}_2=-2(3;3;-1)=-2\bar{l}_1$. Это означает, что направляющие векторы обеих прямых пропорциональны, а сами прямые параллельны. Расстояние между параллельными прямыми можно рассмотреть как расстояние от точки, лежащей на одной из прямых, до второй прямой. В качестве точки $M(x_0,y_0,z_0)$ выберем $M(0,-2,1)$ (принадлежит второй прямой) и в соответствии с (2.8) получаем :

$$\delta=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}-2-2 & 1-4\\ 3 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1-4 & 0+1\\ -1 & 3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0+1 & -2-2\\ 3 & 3\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 3 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & -4\\ 3 & 3\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{(4+9)^2+(-9+1)^2+(3+12)^2}}{\sqrt{19}}=$$

$$=\frac{\sqrt{169+64+225}}{\sqrt{19}}=\sqrt{\frac{457}{19}}.$$

2.3. Задания для самостоятельного решения.

Упражнение 2.1. Записать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору; привести к общему виду: **a)** *A(4;3;2),* $\bar{l} = (-1;2;-3)$; **b)** *A(-2;-3;1),* $\bar{l} = (3;-2;6)$.

Упражнение 2.2. Записать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через заданные точки, привести к общему виду:

a) *A(-1;2;3), B(2;6;-1);* **b)** *A(3;-1;4) , B(1;3;2).*

Упражнение 2.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через заданных точки: **a)** *A(-1;2;3), B(2;6;-1), C(1;3;0);* **b)** *A(3;-1;4) , B(3;3;2), C(3;2;-1).*

Упражнение 2.4. Найти расстояние от заданной точки M до заданной плоскости: **a)** *M(5;1;-1),* $x-2y-2z+4=0$; **b)** *M(1;-3;2),* $2x+3y-4z-28=0$.

Упражнение 2.5. Найти угол между плоскостями:

a) $x-2y+2z-8=0$ и $3x+5y-z+7=0$;

b) $5x+2y+1=0$ и $x-y-2z-47=0.$

Упражнение 2.6. Найти расстояние от точки *M(4;3;0)* до плоскости, проходящей через точки *A(1;3;0) , B(4;-1;2), C(3;0;1).*

Упражнение 2.7. Найти расстояние от точки *M(1;-3;2)* до прямой

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1}.$$

Упражнение 2.8. Доказать, что плоскости $x-2y+2z-8=0$ и $5+4y-2x-4z=0$ параллельны и найти расстояние между ними.

§ 3. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ. ПРИЛОЖЕНИЯ

3.1. Полуплоскости и системы линейных неравенств. Неравенство $y \le kx + b$ определяет полуплоскость, лежащую ниже прямой $y = kx + b$, неравенство $y \ge kx + b$ - полуплоскость, лежащую выше этой прямой. В обоих случаях прямая включается в полуплоскость и на рисунке изображается сплошной линией. Для строгих неравенств прямая в полуплоскость не включается и изображается пунктиром. Решить систему линейных неравенств – значит найти полуплоскости, задаваемые каждым из неравенств, и определить общую часть этих полуплоскостей. Полученное множество может быть как замкнутым, так и «неограниченным». В любом случае для завершения решения необходимо найти вершины полученной области.

Пример 3.1. Решить графически систему линейных неравенств:

a) $\begin{cases} x + y \ge 1 \\ y \le 2x \\ y \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \ge 1 \\ y \le 2x \\ x \le 3, y \ge 0 \end{cases}$.

Решение. Сначала надо построить все прямые (рассмотрев соответствующие равенства); затем из каждого неравенства выразить *y* и определить требуемую полуплоскость; затем найти пересечение найденных полуплоскостей.

В случае **а)** прямая $x + y = 1$ проходит через точки *(0;1)* и *(1;0),* а фигурирующее в системе неравенство определяет полуплоскость, лежащую выше этой прямой ($y \ge 1 - x$). Прямая $y = 2x$ проходит через начало координат и точку (*1;2),* соответствующая полуплоскость лежит ниже этой прямой. Наконец, третье неравенство задает полуплоскость, лежащую выше оси *OX*. Пересечение найденных полуплоскостей изображено на **рисунке 3.1.** Вершина *A* образована пересечением прямых $x+y=1$ и $y=0$ и имеет координаты *A(1,0);* вершина *B* образована пересечением прямых $x+y=1$ и $y=2x$, ее координаты *B(1/3; 2/3).*

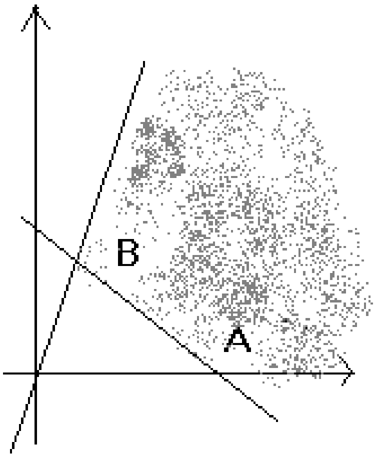

Рисунок 3.1

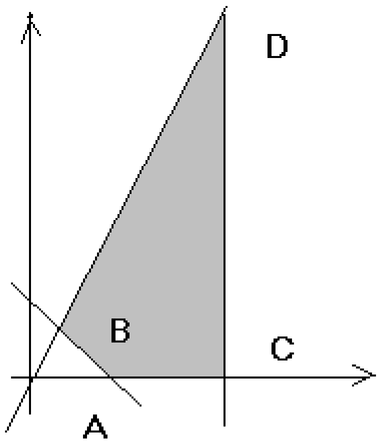

Рисунок 3.2

Случай b) отличается добавленным неравенством $x \le 3$. Результат построений изображен на **рисунке 3.2**. В данном случае пересечение всех полуплоскостей – замкнутая область, четырехугольник *ABDC.* Остается найти координаты вершин. *A(1;0)* и *B(1/3;2/3)* уже известны. Точка *C* – пересечение прямых $x=3$, $y=0$, т.е. *C(3;0).* Аналогично *D* имеет координаты *D(3;6)* как точка пересечения прямых $x=3$, $y=2x$.

3.2. Понятие о математической модели задачи линейного программирования. Задача, рассматриваемая в таком разделе высшей математики как линейное программирование, формулируется следующим образом.

Постановка задачи. Установить, при каких значениях аргументов $x_1, x_2,..., x_n$ функция $f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ достигает своего максимума или минимума (т.е. $f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)\to\max(\min)$), если при этом должны выполняться определенные условия. Эти условия *называются системой ограничений*, сама исследуемая функция – *целевой функцией*. Вектор $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ называется *допустимым решением*, если он удовлетворяет всем требованиям системы ограничений. Совокупность всех допустимых решений образует *область допустимых решений (ОДР)* рассматриваемой задачи. Допустимое решение называют *оптимальным*, если соответствующее ему значение функции и есть требуемое (максимальное или минимальное, в соответствии с постановкой задачи). В случае, когда и функция, и ограничения линейны, говорят о *задаче линейного программирования*. В общей ситуации для функции нескольких (n) переменных и наличии m условий, которым эти переменные должны удовлетворять, такая задача имеет вид:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n < b_1 \\ a_{21}x + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n < b_2 \\ ... \\ a_{m1}x + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n < b_m \\ x_i \ge 0, i = 1,2,...,n \end{cases} \qquad \textbf{(3.1)}$$

Все коэффициенты в (3.1) – вещественные числа, а вместо значка $<$ может стоять любой из знаков: $=,<,>,\le,\ge$. В упрощенном (*матричном*) виде (3.1) выглядит следующим образом:

$$f(X) \to \max(\min), \quad \begin{cases} AX < B \\ X \ge 0 \end{cases}.$$

К задаче линейного программирования сводятся многие практические задачи, например, задачи об использовании ресурсов, о распределении запасов, о составе кормовых смесей и т.д. **При составлении математической модели** в каждом конкретном случае необходимо найти ответы на следующие вопросы:

- что является переменными этой задачи, каким ограничениям они удовлетворяют (в соответствии с условиями задачи);

- в чем состоит цель задачи, как выглядит и к чему должна стремиться целевая функция.

Пример 3.2. *Составить математическую модель для решения следующей задачи.* На фабрике производится продукция двух типов. Для производства единицы продукции первого типа требуются 2 часа работы станка *A*, 1 час работы станка *B* и 1 час на завершающие операции. Для производства единицы продукции второго типа требуются 1 час работы станка *A*, 1 час работы станка *B* и 3 часа на завершающие операции. В течение недели станок *A* может работать не более 70 часов, станок *B* не более 40 часов. На завершающие операции выделяется ровно 90 часов. Доход от продажи единицы продукции первого типа 4 у.е., от продажи единицы продукции второго типа 6 у.е. Сколько продукции первого и второго типа следует производить за неделю, чтобы доход был максимальным?

Решение. Очевидно, что в качестве переменных x_1 и x_2 следует взять количество (в единицах) продукции первого и второго (соответственно) типа. При этом $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, а целевая функция (доход, который должен быть максимальным) имеет вид $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 \to \max$. Теперь обратим внимание на условия, диктующие ограничения на переменные. Для производства обоих видов продукции станок *A* должен работать $2x_1 + 1x_2$ часов, станок *B* $1x_1 + 1x_2$ часов и на завершающие операции требуется $1x_1 + 3x_2$. Учтем указанные в задаче возможности работы станков, и получаем:

$$f(x, y) = 4x_1 + 6x_1 \to \max, \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 = 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

3.3. Графическое решение некоторых задач линейного программирования. Из разнообразия методов, существующих для решения таких задач, выберем для иллюстрации лишь один, применяемый к функциям двух переменных и использующий идеи аналитической геометрии, которые были рассмотрены ранее.

Пусть задача линейного программирования имеет вид

$$f(x,y)=c_1x+c_2y\to\max(\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y<b_1\\ a_{21}x+a_{22}y<b_2\\ \ldots\\ a_{m1}x+a_{m2}y<b_m\\ x\ge 0,\, y\ge 0\end{cases}. \qquad \textbf{(3.2)}$$

(как и раньше, вместо значка $<$ может стоять любой из знаков: $=, <, >, \le, \ge$).

Область допустимых решений такой задачи строится как решение системы линейных неравенств, фигурирующих в системе ограничений. *Если ОДР пуста, то задача решений не имеет*. Если же ОДР удается найти, то, как пересечение полуплоскостей, она является *выпуклым множеством* (т.е. множеством, которое вместе с двумя любыми своими точками содержит отрезок, заключенный между ними).

ОДР является *ограниченной*, если ее можно заключить в некоторый круг конечного радиуса с центром в начале координат. ОДР является *замкнутой***,** если она содержит все свои границы (т.е. все ограничения являются нестрогими неравенствами). *Вершинами* ОДР называют точки, лежащие на пересечении прямых, служащих границами области.

Прямая $c_1x+c_2y=C$ (коэффициенты при x, y – это коэффициенты целевой функции, постоянная C пробегает все множество вещественных чисел) называется *линией уровня.* Линии уровня образуют семейство параллельных прямых с общим вектором нормали $\bar{n}=(c_1,c_2)$. *Опорной прямой* называется линия уровня, которая имеет с областью допустимых решений хотя бы одну общую точку, и по отношению к которой область допустимых решений оказывается полностью в одной из полуплоскостей (на которые прямая делит всю декартову плоскость)**.** Опорная прямая может иметь с областью допустимых решений одну общую точку или совпадать с отрезком границы. *Область допустимых решений имеет не более двух опорных прямых!*

Теорема о значениях целевой функции. Значения целевой функции на линиях уровня возрастают, если линии уровня перемещаются в направлении нормали $\bar{n} = (c_1, c_2)$, и убывают при перемещении линий уровня в противоположную сторону.

Теорема об оптимальных значениях. Если область допустимых решений задачи (3.2) непустая и ограниченная, то целевая функция $f(x, y)$ достигает максимального (минимального) значения в одной из вершин этой области.

Опираясь на эти определения и утверждения, можно сформулировать следующий *алгоритм графического решения задачи линейного программирования с двумя неизвестными.*

1) Построить область допустимых решений, решив графически систему неравенств из (3.2).

2) Построить вектор нормали и линию уровня, проходящую через начало координат (прямую $c_1x + c_2y = 0$).

3) Линию уровня перемещать параллельным переносом до положения опорной прямой.

При движении по нормали задача на минимум имеет оптимальное решение в точке (или на отрезке), через которую проходит первая из полученных опорных прямых, а задача на максимум достигает оптимума на второй опорной прямой (при движении против нормали все наоборот). Если же линии уровня смещаются в бесконечность, то задача не имеет решения в силу неограниченность целевой функции ($f(X) \to +\infty$ для задачи на максимум и $f(X) \to -\infty$ для задачи на минимум).

*Замечание 1***.** После нахождение оптимальных решений необходимо найти оптимальное значение целевой функции.

Замечание 2. Если область допустимых решений замкнута и ограничена, то вместо построения линий уровня и опорных прямых можно определить координаты <u>всех</u> её вершин, найти значения целевой функции в этих точках и выбрать из них наибольшее (наименьшее). Однако такой метод является более трудоемким.

Пример 3.3. Решить задачи линейного программирования

$$f(x,y) = 5x - y \to \max(\min), \qquad f(x,y) = 5x - y \to \max(\min),$$

$$\textbf{a)} \begin{cases} x + y \ge 1 \\ y \le 2x \\ y \ge 0, x \ge 0 \end{cases} \qquad \textbf{b)} \begin{cases} x + y \ge 1 \\ y \le 2x \\ y \ge 0, 0 \le x \le 3 \end{cases}.$$

Решение. В случае **а)** система неравенств, определяющая область допустимых решений, была решена в примере 3.1 а). Изобразим ОДР на чертеже и проведем дополнительные построения (см. рисунок 3.3). В частности, начертим вектор нормали $\overline{N} = (5;-1)$ и прямую (1), соответствующую линии уровня $5x - y = 0$. Переместим (1) до положения опорной прямой (2). Это первая опорная прямая, перемещение происходит в направлении вектора нормали, значит, далее значения функции будут расти, и поэтому в точке *B* целевая функция достигает минимума. Координаты точки *B* также были найдены ранее: $x_B=1/3$, $y_B=2/3$. Итак, $f_{\min} = f(B) = 5 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1.$

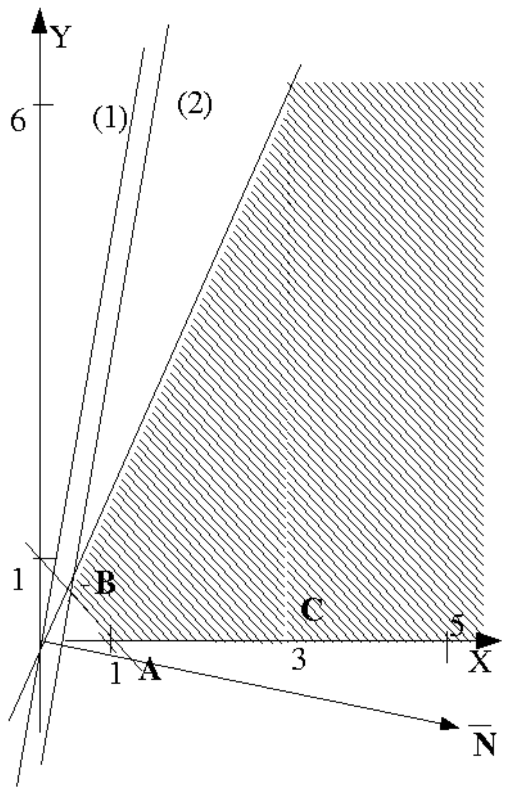

Рисунок 3.3.

Следует заметить, что второй опорной прямой нет, линии уровня уходят в бесконечность, т.е. максимального значения целевая функция не достигает, $f(X) \to +\infty$

Переходим к задаче **б).** Область допустимых решений для неё также была получена ранее, при решении упражнения 3.1б); она представляет собой четырехугольник *ABDC.* Рассмотрим рисунок 3.4. Здесь, кроме ОДР, построены линия уровня $5x - y = 0$ (1), вектор нормали $\overline{N} = (5;-1)$, а также две опорных прямых (2) и (3), которые получены при перемещении линии уровня в направлении нормали. Из этого следует, что максимум фувнкции достигается в точке *C*, минимум – в точке *B*. Координаты точек *B* и С известны: *B(1/3;2/3), C(3;0).* Поэтому

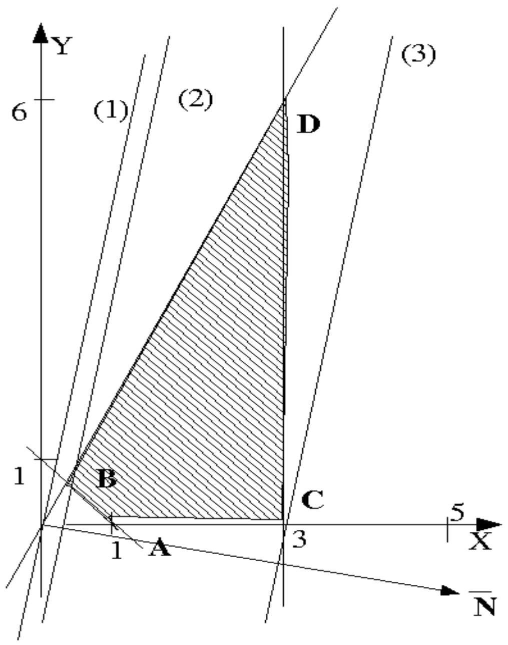

Рисунок 3.4

$$f_{\min} = f(B) = 5 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 1,$$

$$f_{\max} = f(C) = 5 \cdot 3 - 0 = 15$$

Замечание. Как уже отмечалось, в случае замкнутой выпуклой ограниченной области (а именно таким множеством является четырехугольник *ABDC*) максимум (минимум) достигается в одной из вершин, поэтому можно найти координаты всех вершин и сравнить значения функции в них. В нашей ситуации *A(1;0), D(3;6),* $f(A) = 5$, $f(D) = 5 \cdot 3 - 6 = 9$, и несложно убедиться в справедливости вывода, сделанного выше.

3.4. Задания для самостоятельного решения.

Упражнение 3.1. Решить графически систему линейных неравенств:

1) $\begin{cases} x+y\le 1 \\ y\le 2x \\ y\ge 0 \end{cases}$; **2)** $\begin{cases} x+y\ge 1 \\ x+y\le 2 \\ y\ge 0, x\ge 0 \end{cases}$; **3)** $\begin{cases} x+y\le 1 \\ x+y\ge 2 \\ y\ge 0 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 5y-4x\le 12 \\ 4x+3y\le 12 \\ y\ge 0, x\ge 0 \end{cases}$; **5)** $\begin{cases} 2y-3x\le 3 \\ 2y+3x\ge 9 \\ y\ge 0, x\le 5 \end{cases}$; **6)** $\begin{cases} 3x-2y\le 6 \\ 2x+3y\le 6 \\ y\le 1, x\ge 0 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 2x-3y\ge -12 \\ y\ge x \\ 3x+y\ge -6 \end{cases}$; **8)** $\begin{cases} 2y-5x\le 10 \\ 4x-6y\le 12 \\ y\ge 0, x\ge 0 \end{cases}$; **9)** $\begin{cases} x+y\le 1 \\ y\le 2x \\ x\ge 0 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} -2x+y\le 2 \\ x-3y\le -9 \\ 4x+3y\le 24 \\ y\ge 0 \end{cases}$; **11)** $\begin{cases} -2x+y\le 2 \\ x-y\le 0 \\ x+y\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$; **12)** $\begin{cases} -2x+y\le 2 \\ x-y\le 0 \\ x+y\le 5 \end{cases}$.

Упражнение 3.2. Составить математическую модель (не решать!!!).

а) При составлении суточного рациона кормления скота используют сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен содержать не менее 1 кг белка, не менее 100 г кальция и ровно 80 г фосфора. Данные о содержании указанных компонентов в 1 кг каждого продукта и о себестоимости продуктов приведены в таблице. Определить оптимальный рацион кормления при минимальной себестоимости.

	Сено	Силос
Белки, г/кг	40	10
Кальций, г/кг	1,25	2,5
Фосфор, г/кг	2	1
Себест.руб/кг	1,2	0,8

б) При производстве изделий А и Б на фабрике применяются сталь медь и алюминий. Данные о запасах сырья, расходах на одно изделие и прибыли от продажи одного изделия - в таблице. Определить план выпуска продукции, приносящий максимальную прибыль.

Сырье	Запас	А	Б
Медь, кг	570	10	70
Сталь, кг	420	20	50
Алюминий,кг	600	40	10
Прибыль, руб.		3	8

в) Для производства «любительской» и «ливерной» колбас закуплены мясо, сало, ливер. Данные о запасах сырья, компонентах, необходимых для производства 10 кг колбасы каждого вида, прибыли от продажи приведены в таблице. Определить план выпуска колбас, приносящий максимальную прибыль.

Сырье	Запас	Любит.	Лив.
Мясо, кг	360	6	1
Сало, кг	300	3	2
Ливер, кг	100	1	7
Прибыль, руб. за 10кг		120	70

г) Из двух типов руды извлекают минералы A, B, C. Необходимо произвести не менее 3 тонн минерала А, не более 2 тонн минерала В и ровно 1 тонну минерала С (данные о количестве минералов в руде каждого типа и стоимость руды приведены в таблице). Сколько тонн руды каждого типа надо закупить, чтобы затраты оказались минимальными?

	Руда I	Руда II
A	100 кг	200 кг
B	120 кг	50 кг
C	200 кг	100 кг
Цена 1 т	50 у.е.	60 у.е.

Упражнение 3.3. Решить графически задачи линейного программирования:

1) $f(x,y)=5x+6y \to \max(\min), \begin{cases} x+y\le 6 \\ x-2y\ge 0 \\ y\ge 0, x\ge 2 \end{cases}$**;**

2) $f(x,y)=2x+3y \to \max(\min), \begin{cases} x+y\le 1 \\ x+y\ge 5 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$**;**

3) $f(x,y)=-3x+2y \to \max(\min), \begin{cases} x+y\le 6 \\ x-2y\le 0 \\ x\le 2,\ x\ge 0 \end{cases}$

4) $f(x,y)=2x-5y \to \min(\max), \begin{cases} x-4y\ge 4 \\ 2x-y\le 2 \\ y\ge 0, x\ge 0 \end{cases}$**;**

5) $f(x,y)=5x-3y \to \max(\min), \begin{cases} 3x-y\ge -3 \\ x+y\le 9 \\ y\ge 1, x\ge 0 \end{cases}$**;**

6) $f(x,y)=5x+y \to \max(\min), \begin{cases} x+2y\ge 4 \\ x-2y\ge 0 \\ y\ge 0, x\ge 0 \end{cases}$**;**

7) $f(x,y)=y-x \to \max(\min), \begin{cases} x+3y\ge 6 \\ x-3y\ge -6 \\ y\ge 0, x\ge 3 \end{cases}$**;**

8) $f(x,y)=5x+6y\to\max(\min)$, $\begin{cases}3x+2y\le 24\\2x+3y\le 24\\y\ge 0, x\ge 0\end{cases}$**;**

9) $f(x,y)=5x+y\to\max(\min)$, $\begin{cases}x+2y\ge 4\\x-2y\ge 0\\y\ge 0, x\le 6\end{cases}$ **;**

10) $f(x,y)=2x+3y\to\max(\min)$, $\begin{cases}x+y\ge 1\\x+y\le 5\\x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$ **;**

11) $f(x,y)=x+y\to\max(\min)$, $\begin{cases}2x-3y\ge -12\\y\ge x\\3x+y\ge -6\end{cases}$ **;**

12) $f(X)=x+2y\to\max(\min)$**,** $\begin{cases}-x+y\le 3\\x-y\le 0\\x+2y\le 12\\4x-y\ge 0\\x\ge 0,\ y\ge 0\end{cases}$**.**

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: АСТ, 2007.

2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

3. Ахтямов А.М. Математика для социологов и экономистов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

4. Мальцев Е.И. Основы линейной алгебры. – М.: Лань, 2009.

5. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2001.

6. Толстова Ю.Н. Логика математического анализа социологических данных. – М.: Наука, 1991.

7. Толстова Ю.Н. Может ли социология “разговаривать” на языке математики? // Социологические исследования, 2000, № 5. – С. 107-116.

СОДЕРЖАНИЕ