МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Южный федеральный университет»

О. А. Прозоров

Электронное учебно-методическое пособие «Элементарная математика для иноязычных слушателей подготовительных отделений»

Ростов-на-Дону
2017

Печатается по решению
кафедры вычислительной математики и математической физики и Совета РИСО механико-математического факультета ЮФУ протокол № 1 от 24 мая 2017 г.

Аннотация

Электронное учебно-методическое пособие «Элементарная математика для иноязычных слушателей подготовительных отделений» предназначено для подготовки студентов-иностранцев к изучению математики в Южном федеральном университете. Пособие является методическим материалом к учебной дисциплине по выбору «Математика», которая читается иностранным абитуриентам в рамках дополнительной общеобразовательной программы подготовки, предшествующей обучению в бакалавриате, магистратуре, аспирантуре на подготовительном отделении для иностранных учащихся. Пособие является введением в элементарную математику, арифметику, алгебру, а также предназначено для выработки элементарных знаний в чтении и понимании текстов по математике. Пособие состоит из двух частей и приложения. Первая часть посвящена основам арифметики и содержит основные термины, а также наиболее употребляемые словосочетания из этой области, контрольные вопросы к отдельным параграфам. Вторая часть содержит описание основных терминов и понятий из теории линейных и квадратных уравнений и неравенств, а также примеры решения задач на эти темы. В приложении содержатся образцы контрольных работ, которые могут быть использованы для промежуточного контроля знаний абитуриентов-иностранцев по темам, затрагиваемым в пособии.

Оглавление

Часть 1. Арифметика

Сравнение натуральных чисел

При счете натуральные числа называют по порядку: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Из двух натуральных чисел *меньшим* является то, которое при счете называют раньше, и большим – то, которое при счете называют позже.

Например, число 5 *меньше, чем* 8, а число 8 *больше, чем* 7.

Единица является *наименьшим* (самым маленьким) натуральным числом.

Нуль *меньше любого* натурального числа.

Результат сравнения двух чисел удобно записывать неравенством, используя знаки $<$ (меньше), $>$ (больше), $\geq$ (больше или равно) и $\leq$ (меньше или равно).

Например, $4 < 7$, а $8 > 7$. Число 3 меньше, чем 6, и больше, чем 2. Последнее утверждение записывается в виде *двойного неравенства* $2 < 3 < 6$. Так как нуль меньше, чем единица, то записывают $0 < 1$.

Арифметические действия

Сложение чисел

Следующее за данным натуральным числом натуральное число получается прибавлением к нему единицы. Например, $6+1= 7$; $99 + 1 = 100$ и т.д.

Числа, которые складывают, называют *слагаемыми*; число, которое получается при сложении (результат), называется *суммой чисел*.

Пример. $11+5 = 16$. Здесь числа 5 и 11 – слагаемые, а число 161 – сумма чисел 5 и 11.

Контрольные вопросы

1. *Какое число надо прибавить к натуральному числу, чтобы получилось следующее за ним число?*
2. *Какие числа называют слагаемыми?*
3. *Что называют суммой двух чисел?*
4. *Изменяется ли число, если к нему прибавить нуль?*
5. *Чему равна сумма нуля и числа?*

Вычитание чисел

Действие, с помощью которого по сумме и одному из слагаемых находят другое слагаемое, называют *вычитанием*.

Число, из которого вычитают, называется *уменьшаемым*, а число, которое вычитают, - *вычитаемым*. Результат вычитания называется *разностью*.

При вычитании 9-4 = 5 число 9 – уменьшаемое, 4 – вычитаемое, 5 – разность.

С помощью разности чисел a и b можно узнать, *на сколько a* больше b или *на сколько b* меньше a.

Произведение чисел

Выражение вида $m*n$ и значение этого выражения называют *произведением* чисел m и n. Числа m и n в этом выражении называют *множителями*.

Пример: 60* 4 = 240. Число 240 называют *произведением* чисел 60 и 4, а числа 60 и 4 называют *множителями*.

Переместительное свойство умножения формулируется так: от перемены порядка множителей произведение не меняется.

С помощью букв переместительное свойство умножения записывают так:

$$a*b=b*a.$$

Сочетательное свойство умножения: чтобы умножить число на произведение двух чисел, можно сначала его умножить на первый множитель, а затем полученное произведение умножить на второй множитель.

С помощью сочетательного свойства можно менять порядок действий при умножении для упрощения счета. С помощью букв сочетательное свойство умножения записывают так:

$$a*(b*c)=(a*b)*c$$

Пример. Вычислить: $25*(321*8)$.

Решение: согласно сочетательному свойству умножения, первый множитель 25 можно умножить на 8, а полученное произведение — на 321:

$$25*(321*8)=25*(321*2*4)=25*4*(321*2)=100*642=64200.$$

Контрольные вопросы

1. *Что значит умножить одно натуральное число на другое?*
2. *Как называют числа, которые перемножают?*
3. *Как называют результат умножения?*
4. *Сформулируйте переместительное свойство умножения.*
5. *Сформулируйте сочетательное свойство умножения.*
6. *Для чего нужно сочетательное свойство умножения?*
7. *Чему равно произведение m*1 ?*
8. *Чему равно произведение m*0?*

Деление

Действие, с помощью которого по произведению и одному из множителей находят другой множитель, называют *делением*.

Деление обозначается так: 45:5 =9.

Число, которое делят, называют *делимым*; число, на которое делят, называется *делителем*, результат деления называют *частным*.

Частное показывает, *во сколько раз* делимое больше, чем делитель.
Ни одно число нельзя делить на нуль.
Так как $1*a= a$, то имеем $a:1=a$ и, если а не равно нулю, $a:a =1$.
Пример. Решить уравнение $6*x = 48$. По определению операции деления, имеем: $x = 48:6$, $x = 8$.

Зная произведение двух чисел и одно из чисел, можно с помощью делении найти другое:

Чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на другой множитель.

Решим уравнение $42:x = 6$. По смыслу деления, число 42 – произведение множителей 6 и x, то есть $6*x = 42$. По правилу нахождения неизвестного множителя, получим: $x = 42:6$, то есть $x = 7$.

Чтобы найти неизвестный *делитель*, надо *делимое* разделить на *частное*.

Контрольные вопросы

1. *С помощью какого действия находят неизвестный множитель?*

2. *Как называют число, которое делят?*
3. *Что такое делитель?*
4. *Как называют результат деления?*
5. *Как найти неизвестное делимое?*
6. *Как найти неизвестный делитель?*
7. *Чему равно а:1; а:а; 0:а?*
8. *Существует ли такое число n, что 0*n = 1?*
9. *Можно ли разделить 1 на 0?*

Деление натуральных чисел с остатком

Разделить одно натуральное число на другое *нацело* получается не во всех случаях. Например, число 33 не делится нацело на 5. Число 33 состоит из 6 по пять, при этом три останется. Это деление с остатком числа 33 на 5: число 33 – делимое, 5 – делитель, 6 – неполное частное и 3 – остаток. Остаток, по определению, должен быть меньше делителя.

В случае, когда остаток равен нулю, говорят, что делимое делится на делитель *без остатка*, или *нацело*.

В числе 33 содержится 6 раз по 5 и еще остается 3: 33 = 5*6 + 3.
Для нахождения делимого при делении с остатком *неполное частное* умножается на делитель, затем к тому, что получится, прибавляется *остаток*.

Контрольные вопросы

1. *Может ли остаток быть больше делителя?*
2. *Может ли остаток быть равен делителю?*
3. *Как найти делимое по неполному частному, делителю и остатку?*
4. *Чему равен остаток от деления числа 131 на 17?*
5. *Чему равно неполное частное при делении числа 75 на 9?*

Уравнение. Корни уравнения

Найдем значение x, при котором выполняется равенство $x + 2 = 5$. Таким значением будет разность чисел 5 и 2, равная 3.

Если в *равенство* входит буква, то равенство может быть верным при одних значениях этой буквы и неверным при других ее значениях. Например, равенство $x + 2 = 5$ верно при $x = 3$ и неверно при $x = 1$.

Уравнением называют *равенство*, в которое входит буква, значение которой надо найти. Эта буква называется *неизвестнойй.*

Значение буквы, при котором из уравнения получается верное числовое равенство, называют *корнем уравнения*.

Решить уравнение – значит найти все его корни или показать, что это уравнение не имеет ни одного корня.

Пример. Решить уравнение $x +5 = 13$.

По определению операции вычитания, неизвестное слагаемое в сумме можно вычислить как разность суммы и другого слагаемого. Поэтому $x = 13 - 5$, то есть $x = 8$. Проверить правильность найденного значения можно с помощью подстановки следующим образом: *подставим* $x=8$ в исходное уравнение, получим $5+8 = 13$.

Проверка показывает, что решение найдено верно.

Контрольные вопросы

1. *Какое равенство называют уравнением?*
2. *Какое число называют корнем уравнения?*
3. *Что значит решить уравнение?*
4. *Как проверить, верно ли решено уравнение?*
5. *Как найти неизвестное слагаемое; вычитаемое; уменьшаемое?*

6. *Какое число надо прибавить к натуральному числу, чтобы получилось следующее за ним число? А следующее натуральное число за следующим?*
7. *Приведите пример уравнения, которое имеет более одного корня.*
8. *Приведите пример уравнения, у которого нет решений.*

Порядок выполнения действий в выражении

Сложение и вычитание чисел относятся к действиям *первой ступени*, а умножение и деление чисел – к действиям *второй ступени*

Порядок выполнения действий определяется следующими правилами:

1. В выражении без скобок, содержащем действия одной ступени, действия выполняются по порядку слева направо.
2. В выражении без скобок, содержащем действия первой и второй ступени, сначала выполняются действия второй ступени, а затем – первой.
3. В выражении со скобками сначала выполняют действия в скобках с учетом правил 1 и 2.

Пример. Найдем значение выражения (48+324):6-12*4. В этом выражении есть скобки. Сначала выполняются действия в скобках: 48+324=372, затем умножение 12*4. Подставив эти значения, получим: 372:6-48= 62-48=14.

Контрольные вопросы

1. *Перечислите действия первой ступени и действия второй ступени.*
2. *В каком порядке выполняют действия в выражениях без скобок, если в него входят действия одной и той же ступени; все арифметические действия?*
3. *В каком порядке выполняют действия в выражениях со скобками?*

Делители и кратные

20 яблок поровну делятся между 4 ребятами. Каждый получит по 5 яблок. Если же 20 яблок делятся между 6 ребятами, то каждый получит по 3 яблока, а 2 яблока останутся. Это означает, что число 4 является делителем числа 20, а число 6 не является делителем числа 20.

Делителем натурального числа *a* называют натуральное число, на которое *a делится без остатка*.

Число 12 имеет шесть делителей: 1,2,3,4, 6 и 12. Число 1 является делителем любого натурального числа.

Кратным натурального числа *a* называют натуральное число, которое делится без остатка на *a*.

Контрольные вопросы

1. *Перечислите все делители чисел 32, 67, 134.*
2. *Кратно ли число 132 числу 33?*
3. *Какое число называют кратным натуральному числу а?*
4. *Какое число является делителем любого натурального числа?*
5. *Какое число и кратно n, и является делителем n?*
6. *Является ли число 15 делителем 105?*

Простейшие признаки делимости

С помощью признаков делимости можно узнать, делится ли одно натуральное число на другое. Например, натуральное число, которое оканчивается цифрой 0, можно разделить *без остатка* на 10 отбрасыванием последней цифры 0, которая стоит справа.

Если же натуральное число не оканчивается нулем, то оно не делится без остатка на 10. Цифра, которая стоит в разряде единиц, является остатком.
Аналогично: если число оканчивается цифрой 0 или 5, оно делится без остатка на 5, в остальных случаях, когда в конце стоит другая цифра, число без остатка на 5 не делится.

Натуральные числа, которые делятся нацело на 2, называют *четными*, а числа, которые при делении на 2 дают остаток 1, называют *нечетными*.

Цифры 0, 2, 4, 6, 8 называют четными, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 – нечетными.

Признак делимости натурального числа на 2: если запись натурального числа оканчивается четной цифрой, то это число четно (делится без остатка на 2), а если запись числа оканчивается нечетной цифрой, то это число нечетно.

Признаки делимости на 9 и на 3

Если сумма цифр числа делится на 9 (на 3) , то и само число делится на 9 (на 3); если сумма цифр числа не делится на 9 (на 3), то и само число не делится на 9 (на 3).

Примеры. Число 123426 делится на 9, так как сумма его цифр:
1+2+3+4+2+6=18 кратна 9.
Число 51 634 не делится на 9, так как сумма его цифр: 5+1+6+3+4=19 не делится на 9.

Контрольные вопросы

1. *Как по записи натурального числа узнать, делится оно на 9?*
2. *Как по записи натурального числа узнать, делится оно на 3?*
3. *Сформулируйте признаки делимости на 10, на 5 и на 2.*

Основная теорема арифметики

Натуральное число называют *простым*, если оно имеет только два делителя: единицу и само это число.

Натуральное число называют *составным*, если оно имеет более двух делителей.

Число 1 имеет только один делитель, оно делится только само на себя. Значит, единица не является ни составным, ни простым числом.

Список простых чисел меньших ста: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 , 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Число 78 составное, потому что кроме 1 и 78 оно делится, например, на 2. Так как 78:2 = 39, то 78 = 2*39. Число 78 разложено на множители 2 и 39.

Любое *составное* число раскладывается на два множителя, каждый из которых больше 1. Простое число так разложить на множители нельзя.

Разложение на простые множители

Число 210 является произведением чисел 21 и 10. Говорят, что число 210 разложено на множители 21 и 10. Числа 21 и 10 также составные. Их можно представить в виде произведений: 21 =3*7, 10=2*5. Все множители получились простыми числами: 210=3*7*2*5. Значит, число 210 *разложено на простые множители*: 210 = 21*10 = 2*3*5*7. Записывают множители в порядке их возрастания.

Основная теорема арифметики: каждое натуральное число можно представить в виде произведения простых множителей, причём это представление единственно с точностью до порядка следования сомножителей.

Нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного

Наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа *a* и *b,* называют *наибольшим общим делителем* этих чисел.

Пример. Найдем наибольший общий делитель чисел 24 и 35.

Делителями 24 будут 1, 2, 3,4, 6, 8, 12, 24, а делителями 35 будут 1, 5, 7, 35.

Числа 24 и 35 имеют только один общий делитель – число 1.

Два натуральных числа, наибольший общий делитель которых равен единице, называются *взаимно простыми*.

Для того, чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, надо:

1) выписать разложение на простые множители всех чисел;
2) выбрать одно число и вычеркнуть из его разложения все множители, которые не встречаются в разложении других чисел;
3) найти произведение оставшихся множителей.

В случае, когда все числа делятся на одно из них, это число и есть наибольший общий делитель данных чисел.

Например, наибольшим общим делителем чисел 15, 45, 75 и 180 будет число 15, так как на 15 делятся все числа: 45, 75 и 180.

Наименьшим общим кратным натуральных чисел *a* и *b* называют наименьшее натуральное число, которое кратно *a и b* одновременно.

Наименьшее общее кратное чисел 75 и 60 можно найти, не выписывая кратные этих чисел. Для этого разложим 75 и 60 на простые множители: 75=3*5*5, а 60=2*2*3*5.

Выпишем множители, входящие в разложение первого из этих чисел и добавим к ним недостающие множители 2 и 2 из разложения второго числа.

Получаем пять множителей 2*2*3*5*5, произведение которых равно 300. Это число является наименьшим общим кратным чисел 75 и 60.

Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких чисел, нужно: 1) каждое число разложить на простые множители; 2) выписать сначала все множители, которые входят в разложение одного из чисел; 3) добавить к ним недостающие множители из разложений остальных чисел; 4) после этого перемножить все множители, полученные в пункте 3 и 4.

Контрольные вопросы

1. *Какие числа называют простыми?*
2. *Какие числа называют составными?*
3. *Какое число называют наибольшим общим делителем двух натуральных чисел?*
4. *Какие два числа называют взаимно простыми?*
5. *Какое число называют наименьшим общим кратным натуральных чисел a и b?*

Дроби.

Долю ½ называют половиной, 1/3 – третью, а ¼ - четвертью.

Пример. Пирог разрезали на 8 равных частей, из них 5 съели, осталось 3 доли пирога. Эти три доли обозначают: 3/8 пирога.

Записи вида 5/8 называют обыкновенными дробями. В дроби число 5 называют *числителем* дроби, а число 8 – *знаменателем* дроби.

Знаменатель показывает, на *сколько частей* делят, а числитель – сколько частей выбрано.

Так как 1 м = 10 дм = 100 см, то 1 см = 1/100 м, 1 дм = 1/10 м.

Так как 1 кг = 1000 г, то 1 г =1/1000 кг (одной тысячной килограмма).

Так как 1 т = 1 000 000 г, то 1 г = 1/1000000 (одной миллионной тонны).

Контрольные вопросы

1. *Что показывает знаменатель дроби?*
2. *Что показывает числитель дроби?*
3. *Какой доле килограмма равен 1 грамм?*
4. *Какой доле километра равен 1 сантиметр?*
5. *Как называется:*

    а) одна сотая доля метра;

    б) одна тысячная доля тонны;

    в) одна двадцать четвертая доля суток;

    г) одна шестидесятая доля часа;

Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь.

Две равные дроби являются различными записями одного и того же числа.

Деление числителя и знаменателя на их общий делитель, отличный от единицы, называют *сокращением* дроби.

Дробь 3/4 сократить нельзя, так как числа 3 и 4 являются взаимно простыами, такая дробь называется *несократимой.*

Наибольшим числом, на которое сокращается дробь, – это наибольший делитель ее числителя и знаменателя. При сокращении дроби числитель и знаменатель раскладываются в произведения несколько множителей, а затем общие множители сокращаются.

Контрольные вопросы

- *Какую операцию называют сокращением дроби?*
- *Какую дробь называют несократимой? Приведите пример.*

Приведение дробей к общему знаменателю

Умножим числитель и знаменатель дроби ¾ на число 3. Получим равную ей дробь 9/12. Говорят, что мы *привели дробь к новому знаменателю* 12.

Дробь можно привести к любому знаменателю, кратному знаменателю данной дроби.

Число, на которое надо умножить знаменатель дроби, чтобы получить новый знаменатель, называют *дополнительным* множителем.

При приведении дроби ¾ на число 3 к знаменателю 12 дополнительным множителем является число 3.

Пример. Приведем дробь 4/9 к знаменателю 45.
Число 45 кратно 9, так как 45:9 = 5. Дополнительным множителем является число 5. Умножим числитель и знаменатель данной дроби на 5. Получим 20/45.

Любые две дроби можно привести к одному и тому же знаменателю, который называется *общим знаменателем*.

Общим знаменателем дробей может быть произведение знаменателей.

Обычно дроби приводят к *наименьшему общему знаменателю*, который находится как наименьшее общее кратное знаменателей дробей.

Дроби с разными знаменателями приводятся к общему знаменателю. После этого их можно сравнивать, а также производить с ними сложение и вычитание.

Возведение числа в степень. Квадрат и куб

Произведение одинаковых множителей можно записать так:
вместо 3*3*3*3*3 пишут 3^5. Запись 3^5 читают: «три в пятой степени».

В записи 2^6 число 2 называют *основанием степени*, число 6, которое показывает, сколько множителей в произведении, – *показателем степени*, а само выражение 2^6 называют степенью.

Произведение чисел a на a (вторая степень числа a) называется также квадратом числа a. Число a^2 читается так: «a в квадрате».

Например, 18^2 = 18*18 = 324.

Третья степень числа a называется кубом числа a и обозначается a^3.

Первую степень числа равна ему самому: 10^1=10.

1. *Что такое квадрат числа?*
2. *Что такое куб числа?*

Упрощение выражений

Значения выражений (8 + 7)*6 и 8*6 +7*6 совпадают и равны 90. Этот пример является иллюстрацией следующего свойства.

Распределительное свойство умножения относительно сложения: для того чтобы умножить сумму чисел на число, можно сначала умножить на это число каждое слагаемое, а затем сложить полученные произведения.

С помощью букв это свойство записывается так: $(a+b)c = ac + bc$.

Одинаковые значения имеют и выражения (9 - 5) *3 и 9 *3 - 5*3, так как
(9 - 5) *3 = 4*3 = 12 и 9 *3 - 5 *3 = 27-15 = 12.

Распределительное свойство умножения относительно вычитания: для того чтобы умножить разность на число, можно умножить на это число уменьшаемое и вычитаемое и из первого произведения вычесть второе.

С помощью букв его записывают так: $(a - b)c = ac - bc$.
Распределительное свойство умножения позволяет упрощать выражения вида $3a + 7a$. Имеем: $3a + 7a = (3 + 7)a = 10a$. (три *a* да семь *a* равно десяти *a*).

Правила округления чисел

Пусть число x таково, что $3 < x < 4$. Число 3 называют *приближенным значением x с недостатком*, а число 4 – *приближенным значением x с избытком*.

Если $a < x < b$, то a называют *приближенным значением* числа x с недостатком, а b – *приближенным значением* x с избытком.

Любое число, у которого 3 целых (кроме 3,5), а цифра десятых равна 6,7,8 и 9, ближе к 4, чем к 3. При округлении этого числа до целых получаем ответ 4. Например, 3,86 ≈ 4; 3,611≈ 4; 3,803≈ 4 (знак ≈ читают: «приближенно равно»).
Если же в числе, у которого 3 целых, в разряде десятых стоит цифра 0, 1, 2, 3 или 4, то это число ближе к 3, чем к 4. При округлении его до целых ответ 3.

Замену числа ближайшим к нему натуральным числом или нулем называют *округлением* этого числа до целых.

- Для того, чтобы округлить число до определенного разряда, нужно все цифры, следующие за этим разрядом, заменить нулями; либо отбросить – если они стоят после запятой.
- Если первая отброшенная или замененная нулем цифра равна 5, 6, 7, 8 или 9, то стоящую перед ней цифру увеличивают на 1.
- Если первая отброшенная или замененная нулем цифра равна 0, 1,2,3 или 4, то стоящую перед ней цифру оставляют без изменения.

Пример. Округлим число 73,3765 до сотых.
Отбрасываем цифры 6 и 5, которые следуют за разрядом сотых. Первая из этих цифр 6, поэтому стоящую перед ней цифру 7 увеличиваем на 1. Получаем 73,38. Пишут: 73,3765≈73,38.

Контрольные вопросы

1. *Какое число называют приближенным значением с недостатком?*
2. *Какое число называют приближенным значением с избытком?*
3. *Что значит округлить число до целых?*
4. *Как округлить число?*
5. *Что надо сделать с последней оставленной цифрой, если после нее идет цифра 8? цифра 5? цифра 3?*

Умножение десятичных дробей

Умножить число на 0,1; 0,01; 0,001 – то же самое, что разделить его на 10, 100, 1000, поэтому при умножении запятая переносится влево на столько цифр, сколько нулей стоит перед единицей в множителе.

Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, нужно:
1) умножить эти дроби друг на друга без учета запятых;

2) отделить запятой справа количество цифр, равное общему количеству цифр после запятой в умножаемых дробях.

Если в произведении получается меньше цифр, чем надо отделить запятой, то впереди пишут нуль или несколько нулей.

Контрольные вопросы

1. *Как умножить десятичную дробь на 0,1; 0,01; 0,001?*
2. *На сколько цифр и в какую сторону надо перенести запятую при умножении на 0,01; 1000; 10000?*
3. *Как умножить число на десятичную дробь?*
4. *Что надо сделать при умножении на десятичную дробь, если в произведении меньше цифр, чем надо отделить запятой?*

Среднее арифметическое

Среднее арифметическое чисел – это частное от деления суммы чисел на количество слагаемых в этой сумме.

Пример. Человек шел 2 ч со скоростью 5 км/ч, а затем бежал со скоростью 8 км/ч 1 час. С какой постоянной скоростью он должен был идти, чтобы пройти то же расстояние за то же время?
Найдем все расстояние, которое прошел человек: 5*2+8*1=10+8 = 18 (км).
Разделим пройденный путь на время, затраченное на этот путь: 18:3 =6. Поэтому человек должен идти с постоянной скоростью 6 км/ч.
Найденную таким образом скорость называют *средней скоростью* движения.

Можно найти эту скорость, вычислив среднее арифметическое скоростей за каждый час движения: (5 +5 + 8) : 3 = 6. Так можно найти средние значения (например, производительность).

Контрольные вопросы

1. *Какое число называют средним арифметическим нескольких чисел?*
2. *Как найти среднее арифметическое нескольких чисел?*
3. *Как найти среднюю скорость движения?*

Отношения величин. Пропорциональные зависимости

Пример. В классе 20 учеников, пять из них изучают биологию. Какую часть составляют те, кто изучает биологию?

Узнаем, какую часть всего класса составляет один человек. Так как в классе 20 человек, то один человек составляет 1/20 класса (5%). Значит, 5 человек составляют 5/20 всего класса.

Ответ можно записать в виде десятичной дроби или в процентах: 5/20 = 25%.

Частное двух чисел называют ***отношением*** этих чисел.

Отношение показывает, *во сколько раз* первое число больше второго, или *какую часть* первое число составляет от второго.

- Если значения двух *величин* выражены одной и той же единицей измерения, то их отношение называют также отношением этих величин (отношением длин, отношением масс, отношением площадей и т. д.).
- Если значения двух величин выражены *разными* единицами измерения, то для нахождения отношения этих величин надо перейти к одной единице измерения.

Пропорции

Отношения 10,8:2,7 и 8,4:2,1 равны: значения этих чисел равны 4. Поэтому можно записать равенство 10,8:2,7 =8,4:2,1.

Пропорцией это равенство двух отношений. Она записывается в виде: $a:b = c:d$. Читается эта запись так: «Отношение *a* к *b* равно отношению *c* к *d*» или «*a* так относится к *b*, как *c* относится к d.

В пропорции или $a:b = c:d$, числа *a* и *d* называют *крайними* членами, а числа *b* и *c* – *средними членами пропорции*. В пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.

Пропорциональная зависимость между двумя величинами

Две величины называют *прямо пропорциональными*, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Величины, как скорость и время, называют *обратно пропорциональным* величинами.

Две величины называют *обратно пропорциональными*, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

Не всякие две величины являются прямо пропорциональными или обратно пропорциональными (привести пример).

Контрольные вопросы

1. *Что называют отношением двух чисел?*

2. *Как узнать, какую часть число a=12 составляет от числа b=36?*
3. *Как узнать, сколько процентов одно число составляет от другого?*
4. *Какие величины называют прямо пропорциональными? Что можно сказать об отношениях соответствующих значений таких величин?*
5. *Приведите примеры из физики двух прямо пропорциональных величин.*
6. *Какие величины называют обратно пропорциональными? Что можно сказать об отношениях соответствующих значений таких величин?*
7. *Привести примеры из физики двух обратно пропорциональных величин.*
8. *Приведите примеры из физики двух величин, у которых зависимость не является ни прямо, ни обратно пропорциональной.*

Модуль числа

Модулем числа a, называют расстояние от начала координат до точки А (a) на числовой оси. Модуль обознается так $|a|$.

Модули противоположных чисел, то есть чисел a и $-a$, совпадают. Например, модули чисел 3 и -3 равны числу 3, так как эти точки удалены от начала отсчета на равное расстояние: 3 единичных отрезка.

Модуль числа 0 равен 0, так как точка с координатой 0 совпадает с началом отсчета 0, т. е. удалена от нее на 0 единичных отрезков. Пишут: $|0| =0$.
Для неотрицательных чисел модуль равен самому числу. Модуль отрицательного числа равен противоположному числу.

Контрольные вопросы.

1. *Чему равен модуль положительного числа или нуля?*
2. *Чему равен модуль отрицательного числа?*

3. *Может ли модуль какого-нибудь числа быть отрицательным числом?*
4. *Какие значения x, удовлетворяют уравнению* $|x|=1$, $|x|=-1$?

Часть 2. Решение уравнений и неравенств

Линейные и квадратные уравнения

Уравнения. Основные понятия

Равенство вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции от переменной x, называется *уравнением* с одной *переменной* x (или *с одним неизвестным* x). Функция $f(x)$ называется *левой частью*, а $g(x)$ – *правой частью* уравнения.

Число a называется *корнем* (или *решением*) данного уравнения, если при подстановке числа a вместо x в обе части уравнения получаем *верное равенство* ($f(a) = g(a)$), то есть при $x = a$ обе части уравнения совпадают.

Решить уравнение – значит найти множество всех корней (решений) этого уравнения или доказать, что их нет.

Корни уравнения записывают в виде множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, либо в виде равенств $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$.

Пример. Решить уравнение

$$(x + 3)(2x - 1)(x - 2) = 0.$$

Данное уравнение имеет 3 корня: $x_1 = -3$; $x_2 = \frac{1}{2}$ и $x_3 = 2$, в силу того, что произведение нескольких чисел равно нулю *в том и только в том случае*, когда *хотя бы один* из множителей, входящих в произведение равен нулю, а остальные множители имеют смысл.

Обычно решение задачи ищется на некотором *множестве*. Так, например, если в задаче неизвестно количество учеников, решение ищется на множестве целых неотрицательных чисел.

Если множество значений переменной в уравнении не указано, обычно корни разыскиваются на множестве вещественных чисел, при которых уравнение *имеет смысл*.

Областью допустимых значений (ОДЗ) переменной в уравнении называется множество значений переменной, при которых уравнение имеет смысл.

Перед решением уравнения определяют его область допустимых значений.

Примеры.

1) Уравнение $\frac{(x+3)}{(x-1)} = 0$ имеет ОДЗ $x \neq 1$.
2) Уравнение $\sqrt{x} = -14 + x^2$ имеет ОДЗ $x \geq 0$.

Равносильные преобразования уравнений

Уравнение $f(x) = g(x)$ *равносильно (эквивалентно)* уравнению $f_1(x) = g_1(x)$, если их решения совпадают.

Тот факт, что уравнения $f(x) = g(x)$ и $f_1(x) = g_1(x)$ равносильны, обозначают так:

$$f(x) = g(x) \iff f_1(x) = g_1(x).$$

Преобразования уравнений, которые сохраняют его корни, называются *равносильными преобразованиями*.

Пусть функция $h(x)$ определена для всех x, для которых определены $f(x)$ и $g(x)$.

1. Если к обеим частям уравнения прибавить или отнять одну и ту же функцию, получим равносильное уравнение:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x),$$

В частности, слагаемое можно переносить из одной части уравнения в другую, изменив его знак:

$$f(x) + h(x) = g(x) \iff f(x) = g(x) - h(x).$$

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на отличную от нуля функцию, получим равносильное уравнение:

$$f(x) = g(x) \iff f(x) * h(x) = g(x) * h(x), \quad (h(x) \neq 0).$$

В частности, отсюда следует: $f(x)/h(x) = g(x) \iff f(x) = g(x) * h(x)$, $(h(x) \neq 0)$.

Пример. Решить уравнение $5x - 2 = 0$.

Прибавив к левой и правой части этого уравнения число 2 (или перенесем -2 из левой части уравнения в правую часть с противоположным знаком), получим:

$$5x = 2.$$

Поделим обе части полученного уравнения на число 5, получим: $x = \frac{2}{5}$. Равносильными преобразованиями получено решение исходного уравнения $x = \frac{2}{5}$.

Линейные уравнения

Уравнение вида $ax = b$, где a и b – некоторые известные числа, называется *линейным уравнением* относительно переменной x.

Если $a = b = 0$, то любое число является решением линейного уравнения. Если $a = 0$, но $b \neq 0$, то линейное уравнение *решений не имеет*. Если же $a \neq 0$, то это уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$.

Пример. Линейное уравнение $3x = 5$ имеет единственный корень $x_1 = \frac{5}{3}$.

Задачи

1. Решить уравнения, отмечая равносильные преобразования:

$$6x - 5 = 4x + 3, \qquad 7x - (2x - 4) = 5x - 1.$$

2. При каких значениях параметра a уравнения не имеют корней:

$$ax + 3 = 2x, \qquad (a^2 - 4)x = a^2 + a - 6, \qquad \frac{3}{ax-4} = \frac{5}{3x-a}.$$

3. При каких значениях параметра a уравнение имеет бесконечно много решений:

$$(a^2-1)x = 2a^2 + a - 3, \qquad a^2x = a(x+2) - 2.$$

Квадратные уравнения

Квадратное уравнение – это уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x – неизвестное, a, b, c – действительные числа, причем $a \neq 0$.

Число a называется коэффициентом при квадрате неизвестного,
число b – коэффициентом при неизвестном,
число c – *свободным членом*.
Квадратное уравнение, в котором коэффициент при x^2 равен 1, называется *приведенным*.
Приведенное квадратное уравнение записывается так $x^2+px+q = 0$.

Теорема. Если выполняется тождество $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ при $x_1 \neq x_2$ имеет два корня, а при $x_1= x_2$ – один корень.

Пример.

Составьте квадратное уравнение, имеющее:

а) коэффициент при x^2 равный 3, а корни, равные 5 и 6;

б) коэффициент при x^2, равный 1, а корни, равные -3 и 2.

Формула корней квадратного уравнения

Формула для решений квадратного уравнения получается выделением полного квадрата и разложением на множители левой части квадратного уравнения. Сначала разделим обе части уравнения $ax^2+bx+c=0$ на a – от этого его корни не изменятся. Для решения уравнения $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, выделим в левой части полный квадрат

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}$$

Здесь для краткости введено обозначение $D=b^2-4ac$ (дискриминант). Проанализируем возможные варианты решен для различных знаков дискриминанта.

а) Если число *D* положительно, то из *D* можно извлечь квадратный корень и *D* записывается в виде $D=\left(\sqrt{D}\right)^2$. По формуле разности квадратов выводим: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2=(x-x_1)(x-x_2)$, где $x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}$.

Эти формулы можно объединить в одну: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

б) Число *D=0,* тогда уравнение имеет вид $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$, у него один корень $x=-\frac{b}{2a}$.

в) Число *D<0,* тогда уравнение $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}=0$ не имеет решений, так как $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$, а число $-\frac{D}{4a^2}>0$. Сумма положительного и неотрицательного чисел не может обращаться в нуль.

Неполное квадратное уравнение – квадратное уравнение, у которого или коэффициент при неизвестном, или свободный член, или они оба равны нулю.

Такие уравнения имеют вид $ax^2+c=0$, или $ax^2+bx=0$ или $ax^2=0$ $(a\neq 0)$.

Пример. Решите уравнения, используя выделение полного квадрата и разложение на множители:

$x^2-12x+35=0$; $x^2-x-6=0$; $x^2+4x-5=0$; $(2x+3)^2+(x-2)^2=13$.

Неравенства

Соотношения вида $f(x)<g(x)$, $f(x)>g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции от x, называют *неравенствами с одной переменной* x.

Найти *решение неравенства* – значит найти множество M значений x, при подстановке которых в неравенство получаются верные числовые неравенства.

В процессе решения неравенства с помощью преобразований сводят к более простым – *равносильным* неравенствам, неравенствам, имеющим то же решение.

Правила преобразования неравенств

1. Если слагаемое *перенести из одной части неравенства в другую* с противоположным знаком, не изменяя знак неравенства, получим неравенство, равносильное данному.
2. Если обе части неравенства умножить на одно и то же *положительное* число, не изменяя знак неравенства, получим неравенство, равносильное данному.
3. Если обе части неравенства умножить на одно и то же *отрицательное* число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Доказательство правила 3. Пусть дано неравенство $f(x)>q(x)$ и число $c<0$. Если число a удовлетворяет этому неравенству $f(a)>q(a)$, то справедливо числовое неравенство $cf(a)<cq(a)$.
Это означает, что число a удовлетворяет неравенству $cf(a)<cq(a)$.
Таким же образом можно доказать и обратное утверждение, следовательно, эти неравенства равносильны.

Рациональные неравенства

Целое рациональное неравенство – неравенство вида $f(x)>q(x)$, в котором функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы целыми рациональными выражениями (многочленами).

Решение целого рационального неравенства *сводится к решению* равносильного ему неравенства, у которого в левой части многочлен $P(x)$, а правая часть – нуль, т. е. к неравенству вида $P(x)> 0$.

Всякий многочлен $P(x)$, имеющий корнями числа $a_1 <a_2$ …можно *представить в виде* $P(x)= (x- a_1)(x- a_2)...(x- a_k)Q(x)$.

Если $a_1, a_2, ..., a_k$ – все корни многочлена $P(x)$, то многочлен $Q(x)$ корней не имеет и сохраняет один и тот же знак на всей числовой оси.

Каждый из множителей $x- a_k$ является положительным при $x>a_k$ и – отрицательным при $x<a_k$. Поэтому $P(x)$, как произведение таких множителей, может изменить знак лишь при переходе переменной x через одну из точек a_k. Точки a_k делят числовую ось на несколько интервалов, на каждом из которых рассматриваемое произведение знака не меняет. Значит, достаточно знать знак произведения в какой-нибудь одной («пробной») точке внутри интервала, и этот же знак будет иметь произведение во всех точках данного интервала.

Метод интервалов (промежутков).

а) перенести все слагаемые в левую часть и решить уравнение, приравняв выражение в левой части к нулю;

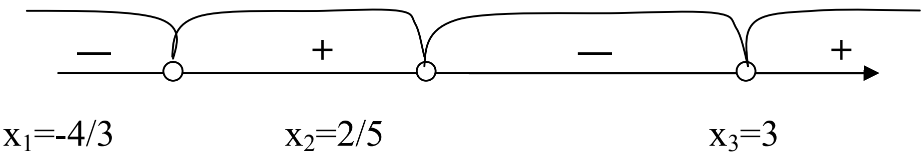
б) найденные корни уравнения нанести на числовую ось. Эти корни разбивают числовую ось на промежутки, на каждом из которых выражение, стоящее в левой части, сохраняет знак;

в) выбрать в каждом из промежутков какое-нибудь значение («пробную» точку) и определить знак выражения в этой точке;

г) выбрать промежутки, в которых выражение имеет требуемый знак, и записать ответ, взяв их объединение.

Пример. Решить неравенство *(5x - 2) (4x + 3) (x - 3) >0.*

Многочлен, записанный в левой части неравенства, *(5x - 2) (4x + 3) (x - 3)* обращается в нуль при $x_1=-4/3$, $x_2=2/5$, $x_3=3$.



Решение дробно-рациональных неравенств

Дробно-рациональное неравенство – неравенство вида *P(x)/Q(x)>0*, где *P(x)* и *Q(x)* – многочлены.

Дробно-рациональное неравенство равносильно неравенству *P(x)Q(x)*>0, поэтому метод промежутков применяется и для решения дробно-рациональных неравенств.

Пример. Решить неравенства:

а) *(5x - 2) (4x + 3) (x - 3) >0*;

б) $(3x^2-5x + 8)(x + 4)<0$;

Решить неравенства:

а) $(x^2-4x + 3)/(3x^2-2x-1)>0$;

б) $(x^2 + x)^2(x^4-4x^3 + 4x^2)<0$;

Приложение. Контрольные работы: арифметика, решение уравнений.

Контрольная работа 1. Вариант 1.

1. От Москвы до Санкт – Петербурга 604 км. Поезд ехал со скоростью 40 км/ч и останавливался 6 раз по 19 минут. Сколько часов заняла поездка?

2. На какие из чисел 2, 3, 4, 5 и 9 делится нацело произведение: $667 \cdot 51 \cdot 555$.

3. Найти наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) следующих чисел: $a = 396$, $b = 180$.

4. Вычислить: $70\frac{3}{4} : \left(30,5 - \left(\frac{(8,625 - 6,25) : 1,2}{2,4 : 0,8 - 2\frac{2}{3}} + \frac{67\frac{1}{2} : 2\frac{1}{7}}{4,5 : 2\frac{2}{3}}\right)\right)$.

5. Из 20кг яблок получается 16кг яблочного пюре. Сколько яблочного пюре получится из 45кг яблок?

6. Из 35 учащихся класса 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический и физический кружки? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

7. На вершину горы ведут 10 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее?

8. Вычислите: $\frac{\sqrt[4]{25^{-16}} \cdot \sqrt[6]{0,04^{-6}}}{5^{-9}}$.

9. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$

10. Найти значение выражения $\sqrt{x^2 + y + y^2}$ при $x = 2$, $y = -1$.

11. Какие из чисел -3; -2;0 и 2 являются решениями неравенства?

$$-2x + 4 > -x - 5 + 2(3 - 2x)$$

Контрольная работа 1. Вариант 2.

1. Найти двузначное число, если известно, что цифра его единиц на 2 больше цифры десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

2. Какую цифру можно поставить вместо звездочки, чтобы число a делилось без остатка на 2, 3 и не делилось на 9: $a = 430*$.

3. Найти наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) следующих чисел: $a = 2 \cdot 3^2 \cdot 11^3$, $b = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

4. Вычислить: $\dfrac{\left(12\dfrac{2}{3} - 10\dfrac{7}{9}\right) \cdot 1\dfrac{10}{17}}{\left(4 - 2\dfrac{1}{3}\right) : 4\dfrac{4}{9}} - \dfrac{\left(\dfrac{1}{5} + 0,75\right) : \dfrac{1}{20}}{1 - \dfrac{80}{99}} \cdot \left(17\dfrac{5}{11} \cdot 2\dfrac{2}{27} - 36\right).$

5. Цена на товар понизилась на 40%, затем еще на 25%. На сколько процентов понизилась цена товара по сравнению с первоначальной ценой?

6. Пусть $A = [0; 4)$, $B = (5; 7]$, $C = [-1; 3)$, $D = [4; 5]$. Найдите множество:

   а) $A \cap B \cap C \cap D$; б) $(A \cup B \cup D) \cap C$.

7. Сколько различных шестизначных чисел можно написать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? (Цифры в записи чисел не повторяются).

8. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{0,125^{12}} \cdot \sqrt[7]{0,5^{-49}}}{\sqrt[3]{2^{-18}}}$.

9. Решить систему уравнений $\begin{cases} -2x + 5y = 2 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$

10. Найти значение выражения $\sqrt{-x^2 + xy + y^2}$ при $x = 3$, $y = 2$.

11. Какие из чисел -3; 1; 2; 3 являются решениями неравенства?

$$-4x + 1 > x - 2 + 2(1 - 2x)$$

Контрольная работа 1. Вариант 1.

1. 17 часов.
2. 3, 5 и 9.
3. НОД(a,b)=36, НОК(a,b)=1980.
4. 12.
5. 36 кг.
6. 6, 14.
7. 100.
8. 125.
9. $\{y = 1/5, x = 7/5\}$
10. 2
11. $0,2$

Контрольная работа 1. Вариант 2.

1. 24.
2. 4308.
3. НОД(a,b)=3, НОК(a,b)=$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^3$.
4. -12.
5. -55%.
6. а) $\varnothing$, б) $[0; 3)$.
7. $A_9^6 = 9!/3! = 60480$.
8. 2.
9. $\{x = -1/11, y = 4/11\}$
10. 1
11. -3

Литература

Основная литература.

1. Н.Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд, Математика для 6 класса для общеобразовательных учреждений, изд-во М.: Мнемозина – 2015 г., 280 с.
2. Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин, Алгебра для 7 кл. общеобразовательных учреждений/ М.: Мнемозина – 2016 г., 320 с.
3. А.Б. Будак, Б.М. Щедрин Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. Изд. 3-е, перераб. и доп. - М. Издат. отдел УНЦ ДО, 2001 - 690 с.
4. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Математика для поступающих. Обучающий курс. Мн.: Выш. шк., 2003.- 493 с.
5. Иванов О.А. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей.- М.: МНЦМО, 2009.- 384с.
6. Письменный, Д. Т. Готовимся к экзамену по математике: математика для старшеклассников. - 12-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2008. - 352 с.

Дополнительная литература.

1. Виленкин В.Я., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Элементарная математика. - М.: Просвещение,1970.
2. А. Г. Мордкович, В. И. Глизбург, Н. Ю. Лаврентьева Математика. Полный справочник. - М., АСТ, Астрель, ВКТ, 2010, 303с.
3. Дорофеев Г.В. Квадратный трехчлен в задачах. - Львов, журнал Квантор, 1991, № 2. - 104 с.

Предметный указатель